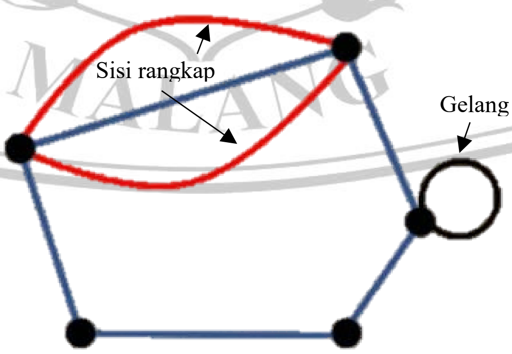
BAB II. KAJIAN PUSTAKA

A. Graf

Sebuah graf G adalah pasangan himpunan (V, E) di mana V adalah himpunan tak kosong yang disebut simpul (*vertex*) dan E adalah himpunan mungkin kosong yang disebut sisi (*edge*). Sebagai contoh misal diketahui sebuah graf G memiliki simpul u, v, w, dan x juga memiliki sisi a, b, c, d, dan e, maka dapat ditulis $G = \left(V(G), E(G)\right)$ di mana $V(G) = \{u, v, w, x\}$ dan $E(G) = \{a, b, c, d, e\}$ (Bondy & Murty, 2008).

Dua simpul pada graf dikatakan bertetangga (*adjacent*) jika dihubungkan oleh sisi (Balakrishnan & Ranganathan, 2012). Graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa jenis berdasarkan kategori pengelompokannya, di antaranya dari ada tidaknya sisi rangkap, gelang, dan orientasi arah pada sisi-sisinya.

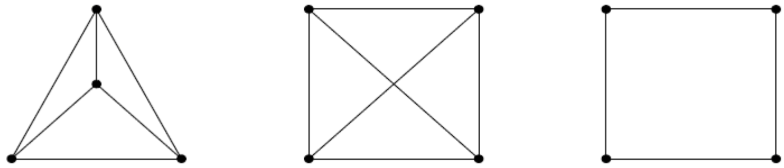
Sisi rangkap (*multiple edge*) adalah dua buah sisi atau lebih yang menghubungkan dua buah simpul yang sama. Gelang (*loop*) adalah sebuah sisi yang hanya menghubungkan sebuah simpul. Graf sederhana (*simple graph*) adalah graf yang tidak memiliki sisi rangkap dan gelang. Graf tak berarah (*undirected graph*) adalah graf yang sisinya tidak memiliki orientasi arah (Vasudev, 2006). Misal u dan v adalah titik pada suatu graf tak berarah, maka $(u, v) = (v, u)$.



Gambar 2.1: Contoh Graf

B. Isomorfisme Graf

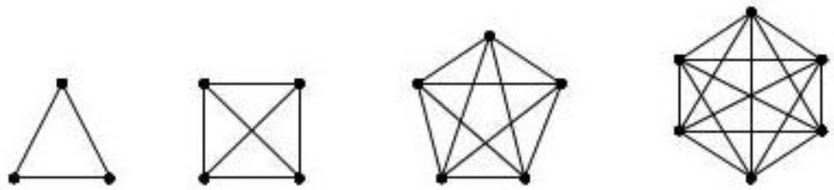
Dua buah graf dapat digambar dengan bentuk yang berbeda tapi mempunyai struktur yang sama. Dua buah graf disebut saling isomorfik jika terdapat korespondensi satu-satu antara simpul di kedua graf tersebut (Gross, Yellen, & Zhang, 2014). Dengan kata lain graf G_1 isomorfik dengan G_2, dapat ditulis $G_1 \cong G_2$, jika ada bijeksi tak kosong $V(G_1) \mapsto V(G_2)$. Dua graf tak berlabel dikatakan sama jika keduanya saling isomorfik. Sebagai contoh pada graf di bawah, graf pertama isomorfik dengan graf kedua, namun tidak isomorfik dengan graf ketiga.



Gambar 2.2: Contoh Graf yang Saling Isomorfik dan Tidak

C. Graf Lengkap

Graf lengkap adalah graf sederhana tak berarah di mana setiap simpul pada graf tersebut terhubung oleh sebuah sisi (Diestel, 2017). Graf lengkap yang memiliki n buah simpul dituliskan sebagai K_n. Jika ada dua buah simpul yang tidak terhubung oleh sisi maka graf tersebut disebut graf tak lengkap. Graf lengkap K_3 dapat digambarkan sebagai segitiga dan graf K_4 dapat digambarkan sebagai tetrahedron atau limas segitiga.



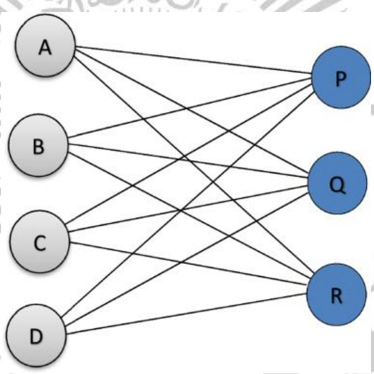
K_3 K_4 K_5 K_6

Gambar 2.3: Contoh Graf Lengkap

D. Graf Bipartit

Menurut Meng, Fengming, dan Guan (2007), suatu graf sederhana $G = (V, E)$ disebut bipartit jika himpunan simpul V dapat dipisah menjadi dua himpunan saling lepas tak kosong V_1 dan V_2 sehingga semua sisi pada graf menghubungkan simpul di V_1 dengan simpul di V_2. (V_1, V_2) kemudian disebut bipartisi dari himpunan simpul V pada G. Himpunan V_1 dan V_2 dapat dikatakan sebagai pewarnaan pada graf dengan dua warna. Misal seluruh simpul pada V_1 diberi warna biru dan seluruh simpul pada V_2 diberi warna merah maka setiap simpul akan terhubung dengan simpul yang memiliki warna berbeda.

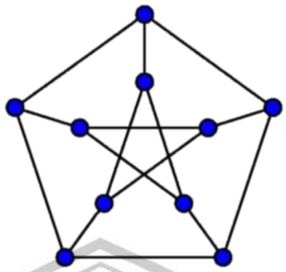
Graf bipartit lengkap adalah graf bipartit yang masing-masing simpul di V_1 dan V_2 dihubungkan oleh tepat satu sisi (Wilson, 1996). Dapat juga dituliskan sebagai graf bipartit (V_1, V_2, E) yang setiap pasangan simpul $v_1 \in V_1$ dan $v_2 \in V_2$ dihubungkan oleh sebuah sisi di E. Graf bipartit lengkap dengan jumlah simpul $|V_1| = m$ dan $|V_2| = n$ dapat ditulis sebagai $K_{m,n}$. Setiap graf yang memiliki penulisan yang sama adalah saling isomorfik.



Gambar 2.4: Contoh Graf Bipartit

E. Graf Petersen

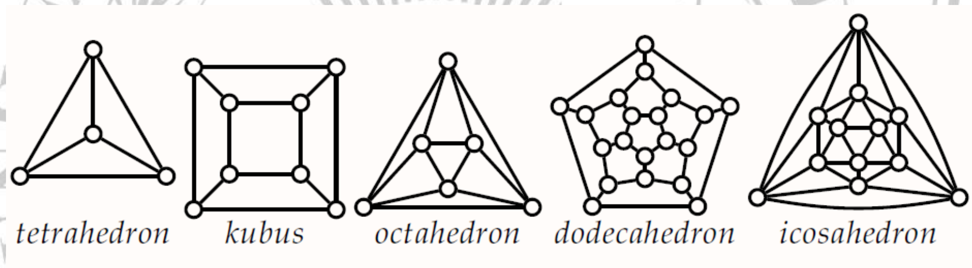
Graf Petersen merupakan salah satu graf yang dianggap penting karena bisa menjadi contoh bagi beberapa permasalahan dalam teori graf sekaligus menjadi penyangkal dari generalisasi yang secara umum berlaku. Salah satu cara menggambar graf ini yaitu dengan memisalkan terdapat himpunan yang memiliki 5 elemen, maka terdapat 10 cara untuk memilih himpunan bagian yang memiliki 2 elemen. Gambar sebuah graf di mana 10 himpunan bagian ini merupakan simpul dan 2 himpunan bagian yang saling lepas dihubungkan oleh sebuah sisi.



Gambar 2.5: Graf Petersen

F. Graf Planar

Graf planar adalah graf yang dapat digambarkan pada bidang datar tanpa ada sisi yang berpotongan (Rigo, 2016). Penggambaran dari graf planar tanpa ada sisi yang berpotongan disebut sebagai graf bidang. Di bawah ini merupakan beberapa contoh graf planar.



Gambar 2.6: Contoh Graf Planar

Untuk mengetahui sebuah graf planar atau tidak terdapat beberapa kriteria yang pasti dipenuhi. Kriteria-kriteria ini diturunkan dari teorema Euler dan berhubungan dengan graf planar maksimal.

1. Teorema Euler

Jika diketahui sebuah graf bidang G di mana v menyatakan banyak simpul, e menyatakan banyak sisi, dan f menyatakan banyak wilayah (daerah yang dibatasi oleh sisi, termasuk daerah terluar dengan luas tak hingga), maka $v - e + f = 2$.

Bukti:

Setiap graf bidang dapat dibuat penggambarannya dengan cara mengambil pohon rentangnya dan menambahkan sisi satu per satu sehingga diperoleh graf G yang diinginkan. Teorema Euler dapat dibuktikan dengan menunjukkan:

a. untuk suatu pohon, berlaku $v - e + f = 2$,

b. setiap langkah penambahan sisi tidak mengubah nilai $v - e + f$.

Bukti:

a. Jika T adalah pohon rentangan G maka dapat dibuat gambar bidang untuk T. Karena T memiliki v simpul, $v - 1$ sisi, dan hanya satu daerah, maka $v - e + f = v - (v - 1) + 1 = 2$

b. Saat menambah sebuah sisi pada suatu bidang, sisi tersebut akan membagi daerah menjadi 2. Dengan kata lain, nilai e bertambah satu dan nilai f juga bertambah satu, sehingga $v - (e + 1) + (f + 1) = v - \left((v - 1) + 1\right) + (1 + 1) = 2$.

2. Graf Planar Maksimal

Sebuah graf planar G dikatakan planar maksimal jika untuk setiap pasangan simpul tak berdekatan u dan v dalam G maka $G + uv$ adalah tidak planar. Pada sebarang graf planar maksimal G yang berorder $v \geq 3$, batas setiap daerah terdiri dari tiga sisi. Sebab itulah graf planar maksimal juga disebut sebagai graf planar segitiga atau graf segitiga. Jika diberikan v simpul maka graf planar akan sangat terbatas pada seberapa besar e. Batas ukuran e ditentukan oleh teorema berikut:

a. Teorema 1

Jika $G(v, e)$ adalah graf planar maksimal dengan $v \geq 3$ maka $e = 3v - 6$.

Bukti:

Misal f banyak daerah di G. Batas setiap daerah dalam G berupa segitiga dan setiap sisi adalah batas dari dua daerah. Oleh karena itu jika banyak daerah dijumlahkan dengan banyak sisi pada masing-masing daerah, maka akan menghasilkan $3f$.

Menurut lemma jabat tangan untuk graf bidang, jumlah semua derajat daerah sama dengan dua kali banyaknya sisi yaitu $2e$, sehingga $3f = 2e$ atau $f = \frac{2}{3}e$. Berdasarkan teorema Euler didapat bahwa $v - e + f = 2$ sehingga diperoleh $v - e + \left(\frac{2}{3}e\right) = 2$ atau $e = 3v - 6$.

b. Teorema 2

Jika $G(v, e)$ adalah graf planar dengan $v \geq 3$ maka $e \leq 3v - 6$.

Bukti:

Tambahkan sisi pada G sedemikian hingga dihasilkan graf planar maksimal $G'(v', e')$. Jelas bahwa $v = v'$ dan $e \leq e'$. Berdasarkan teorema di atas didapat bahwa $e' = 3v' - 6$ sehingga $e \leq 3v - 6$.

Pertidaksamaan $e \leq 3v - 6$ adalah syarat yang pasti dipenuhi oleh sebuah graf planar, namun tidak dapat digunakan untuk membuktikan planaritas sebuah graf. Sebagai contoh, graf $K_{3,3}$ dengan $v = 6$ dan $e = 9$ bukan merupakan graf planar meski memenuhi $e = 9 \leq 3v - 6 = 3(6) - 6 = 12$. Untuk membuktikan graf $K_{3,3}$ bukanlah graf planar dapat digunakan teorema berikut.

c. Teorema 3

Misal $G(v, e)$ graf planar terhubung sederhana yang tidak memuat segitiga, maka $e \leq 2v - 4$.

Bukti:

Misal G graf planar yang memiliki f daerah. Karena G tidak memuat segitiga, maka setiap daerah memiliki derajat setidaknya 4. Dari lemma jabat tangan untuk graf bidang diketahui bahwa $2e \geq 4f$ atau $e \geq 2f$. Berdasarkan teorema Euler $f = e - v + 2$, sehingga didapat $e - v + 2 \leq \frac{1}{2}e$ atau $e \leq 2v - 4$.

Teorema di atas memiliki konsekuensi yang dapat dituliskan sebagai berikut.

d. Teorema 4

Pada setiap graf planar terdapat simpul yang memiliki derajat kurang dari 6.

Bukti:

Misal $G(v, e)$ adalah graf planar dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$.

Jika $v \leq 6$, maka jelas terpenuhi.

Jika tidak, maka hubungan $e \leq 3v - 6$ berimplikasi $e < 3v$.

Andaikan $\deg(v_i) \geq 6$ untuk $i = 1, 2, \dots, v$; maka $\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) = 2e \geq 6v$ yang mengakibatkan $e \geq 3v$. Ini berkontradiksi dengan implikasi di atas yang menyatakan

$e < 3v$. Sehingga dapat diambil kesimpulan bahwa simpul yang terdapat pada G memiliki derajat kurang dari atau sama dengan 5.

Untuk memudahkan penentuan planaritas sebuah graf harus ditemukan ciri atau karakteristik. Karakteristik-karakteristik tersebut yaitu:

1. Tidak semua graf adalah graf planar.

   Bukti:

   Ada graf yang tidak planar, contoh yang digunakan dalam Teorema Kuratowski adalah $K_{3,3}$ dan K_5.

   a. Pembuktian untuk $K_{3,3}$ akan menggunakan kontradiksi. Misalkan $K_{3,3}$ adalah planar, maka $K_{3,3}$ pasti memenuhi Teorema 3 dan teorema Euler. Diketahui pada $K_{3,3}$ $v = 6$ dan $e = 9$. Dari Teorema 3 diketahui bahwa $f \leq \frac{e}{2} = \frac{9}{2} =$ 4.5. Kemudian dari teorema Euler diketahui bahwa $f = e - v + 2 = 9 - 6 + 2 = 5$. Hal ini menimbulkan kontradiksi karena $f = 5 \leq$ 4.5 jelas bernilai salah. Sehingga $K_{3,3}$ tidak planar.

   b. Pembuktian untuk K_5 akan menggunakan Teorema 2. Pada Teorema 2 diketahui bahwa graf planar pasti memenuhi $e \leq 3v - 6$. Pada K_5, $e = 10$ dan $v = 5$ tetapi karena $10 \leq 3(5) - 6 = 9$ tidak bernilai benar maka dapat diambil kesimpulan bahwa K_5 tidak planar.

2. Jika G adalah graf planar, maka setiap subgraf dari G juga merupakan graf planar.

   Bukti:

   Misal graf G adalah planar, maka sesuai definisi graf G dapat digambar pada sebuah bidang. Untuk setiap subgraf H dari G

pasti dapat ditemukan simpul dan sisi dari graf H pada graf bidang G. Dengan kata lain cara sederhana untuk menggambar subgraf H pada sebuah bidang yaitu dari graf bidang G dapat dihilangkan simpul dan sisi yang tidak ada pada subgraf H.

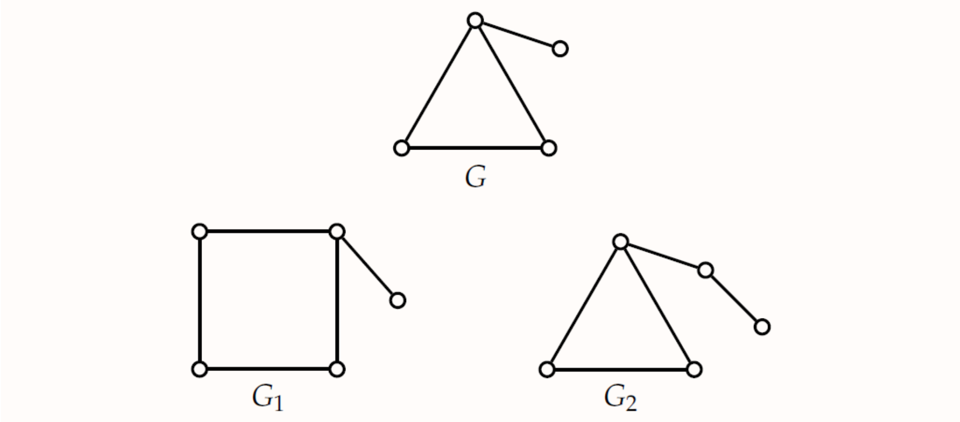
3. Jika ada subgraf dari G yang homeomorfik dengan $K_{3,3}$ atau K_5, maka G bukan graf planar.

   Bukti:

   Pada poin 1 telah dibuktikan bahwa graf $K_{3,3}$ dan K_5 tidak planar. Jika graf yang memuat subgraf yang homeomorfik dengan $K_{3,3}$ dan K_5 bukan graf planar, maka graf yang memuat $K_{3,3}$ dan K_5 itu sendiri pasti juga bukan merupakan graf planar. Hal ini sesuai dengan poin 2, yaitu graf yang memuat graf bagian yang tidak planar pasti bukan graf planar.

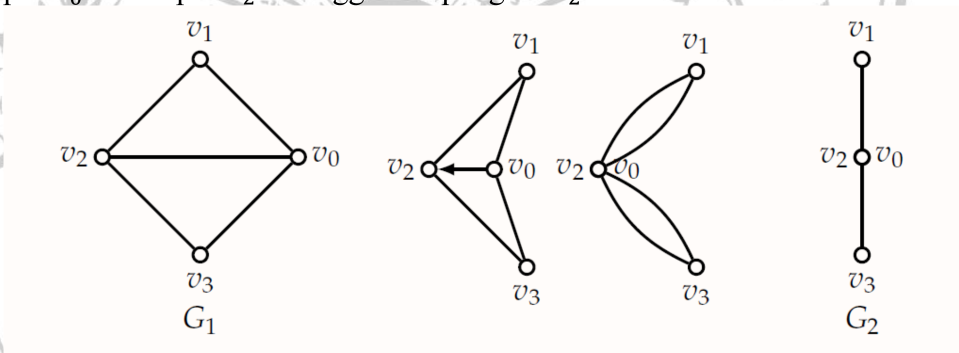
Poin nomor 3 mengacu pada teorema Kuratowski, yang menyatakan bahwa suatu graf disebut graf planar jika dan hanya graf tersebut tidak memiliki subgraf yang merupakan subdivisi dari $K_{3,3}$ atau K_5. Menurut Russel (2001), subdivisi dasar dari G adalah graf yang dihasilkan dari G dengan membuang sebuah sisi $e = uv$ dan menambahkan simpul baru w dan sisi uw dan vw. Subdivisi dari G adalah graf yang dihasilkan dari G dengan serangkaian subdivisi dasar.

Menurut Ray (2013), graf H dikatakan homeomorfik dari G jika H isomorfik dengan sebuah subdivisi dari G. Graf G_1 adalah homeomorfik dengan graf G_2 jika terdapat graf G_3 sedemikian sehingga masing-masing G_1 dan G_2 adalah homeomorfik dari G_3. Sebagai contoh pada gambar di bawah, G_1 dan G_2 adalah subdivisi dari G dan masing-masing homeomorfik dengan G. Namun G_1 dan G_2 tidak homeomorfik antara satu dengan lainnya.



Gambar 2.7: Contoh Graf Homeomorfik

Cara lain yang sejenis dengan subdivisi pada homeomorfisma adalah kontraksi. Menurut Chartrand, Lesniak, dan Zhang (2016) kontraksi dari sebuah sisi adalah penggabungan simpul u pada simpul v. Hal ini berakibat hilangnya sisi uv dan sisi lain yang berhubungan dengan simpul u dan simpul v. Sebagai contoh pada graf G_1di bawah dilakukan kontraksi dari simpul v_0 ke simpul v_2 sehingga didapat graf G_2.



Gambar 2.8: Contoh Kontraksi