Dr. Dwi Priyo Utomo, M.Pd.
Muhamad Huda, M.Pd.

PEMAHAMAN RELASIONAL

Analisis Proses Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika

Bildung

PEMAHAMAN RELASIONAL

ANALISIS PROSES PEMBUKTIAN MENGGUNAKAN INDUKSI MATEMATIKA

Dr. Dwi Priyo Utomo, M.Pd.
Muhamad Huda, M.Pd.

PEMAHAMAN RELASIONAL

Analisis Proses Pembuktian
Menggunakan Induksi Matematika

Bildung

PEMAHAMAN RELASIONAL
ANALISIS PROSES PEMBUKTIAN MENGGUNAKAN INDUKSI MATEMATIKA
Dr. Dwi Priyo Utomo, M. Pd
Muhamad Huda, M.Pd.

Editor: Akhsanul In'am
Desain Sampul: Ruhtata
Lay out/tata letak Isi: Tim Redaksi Bildung

Perpustakaan Nasional: Katalog Dalam Terbitan (KDT)
Pemahaman Relasional Analisis Proses Pembuktian Menggunakan Induksi Matematika/Dr. Dwi Priyo Utomo, M. Pd., Muhamad Huda, M.Pd./Yogyakarta: CV. Bildung Nusantara, 2020

xii + 82 halaman; 15 x 23 cm
ISBN: 978-623-7148-42-5

Cetakan Pertama: 2020

Penerbit:
BILDUNG
Jl. Raya Pleret KM 2
Banguntapan Bantul Yogyakarta 55791
Telpn: +6281227475754 (HP/WA)
Email: bildungpustakautama@gmail.com
Website: www.penerbitbildung.com

Anggota IKAPI

PENGANTAR PENULIS

ALHAMDULILLAH, segala puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Alloh SWT karena monograf ini selesai disusun. Monograf ini disusun untuk membantu mahasiswa mempelajari pemahaman relasional dan pembuktiaan menggunakan induksi matematika.

Memiliki pemahaman relasional yang baik pada suatu topik berarti memiliki modal yang cukup untuk memecahkan masalah terkait topik tersebut. Oleh karena itu, pada setiap bidang kajian matematika, para mahasiswa haruslah berupaya untuk memperoleh pemahaman rasional tersebut. *"Boleh jadi kamu membenci sesuatu padahal ia amat baik bagimu, boleh jadi pula kamu menyukai sesuatu padahal ia amat buruk bagimu. Allah mengetahui, sedang kamu tidak mengetahui." (QS Al-Baqarah 216)*

Penulis menyadari bahwa monograf ini masih banyak kekurangan, tetapi penulis meyakini sepenuhnya bahwa sekecil apa pun monograf ini tetap memberikan manfaat.

Akhir kata guna penyempurnaan monograf ini kritik dan saran dari pembaca sangat penulis nantikan.

Malang, Januari 2020

Penulis

Daftar Tabel

Daftar Gambar

Daftar Isi

Bab 1
Pendahuluan

MATEMATIKA SEBAGAI ilmu pengetahuan yang menggunakan penalaran deduktif, mengandalkan logika dalam meyakinkan kebenaran suatu pernyataan, faktor intuisi dan pola berpikir induktif banyak berperan pada proses awal dalam merumuskan suatu konjektur (*conjecture*) yaitu dugaan awal dalam matematika (Hernadi, 2008). Struktur dan sistem dalam matematika tersusun secara deduktif aksiomatik dimana struktur tersebut diawali dengan istilah yang tidak didefinisikan, istilah yang didefinisikan, lalu disusun pernyataan pangkal yang biasa disebut aksioma atau postulat, selanjutnya disusun teorema-teorema disertai definisi-definisi, teorema yang disusun harus dibuktikan melalui proses deduktif sehingga kebenarannya berlaku secara umum dalam sistemnya (Lestari, 2015). Induksi matematika berdiri sebagai sebuah aksioma, artinya kita menerima kebenaran dari prinsip tersebut tanpa meminta buktinya, dan memang pada kenyataannya, induksi matematika dianggap sebagai salah satu dasar aksioma dalam beberapa teori matematika yang melibatkan bilangan asli (Miksalmina, 2012; Putri, 2016).

Induksi matematika merupakan suatu teknik yang dikembangkan dalam membuktikan suatu pernyataan yang berkaitan dengan objek matematika yang bersifat diskrit, misal teori bilangan, teori graf, kombinatorik (Itzkovitch & Ashkenazi, 2014; Putri, 2016). Induksi matematika, bukti langsung, bukti tidak langsung, bukti kontradiksi, bukti ketunggalan merupakan metode pembuktian matematika yang digunakan oleh matematikawan untuk menjelaskan pernyataan matematika yang telah diketahui kebenarannya (Suandito, 2017).

Pembuktian matematika dapat meningkatkan daya kritis, kreatif dan reflektif (Putu & Harini, 2016). Terdapat alasan mengapa matematikawan melakukan pembuktian yaitu untuk membangun sebuah fakta dengan pasti, mendapatkan pemahaman, mengkomunikasikan gagasan kepada orang lain, untuk tantangan, menciptakan sesuatu yang indah, dan membangun teori matematika yang besar (Suandito, 2017). Beberapa alasan mengapa mahasiswa perlu diberikan pembelajaran pembuktian yaitu: 1) bukti adalah bagian integral dalam matematika, 2) untuk verifikasi dan penemuan fakta, 3) untuk pengembangan kemampuan berpikir logis dan kritis mahasiswa, dan 4) mempercepat dan meningkatkan pemahaman matematik mahasiswa (Syafri, 2017).

Matematika di tingkat perguruan tinggi menuntut mahasiswa calon guru matematika agar mencapai tahap di mana mahasiswa tidak lagi hanya mendalami pemecahan masalah yang telah diketahui metode dan algoritmanya, namun lebih kepada menulis pembuktian dan menghasilkan contoh penyangkal yang melibatkan objek dan konsep yang abstrak, serta melakukan aktivitas matematis dengan algoritma yang tidak didefinisikan (Perbowo & Pradipta, 2017).

Penelitian terdahulu mengungkapkan bahwa mahasiswa masih mengalami kesulitan dalam melakukan pembuktian. Mahasiswa pendidikan matematika UNS mengalami kesulitan dalam melakukan pembuktian langsung, tidak langsung dan pembuktian induksi matematika (Putri, 2016). Mahasiswa semester VI program studi pendidikan matematika FKIP Unsika tahun ajaran 2013-2014, diperoleh data bahwa 79,54% mahasiswa belum mampu menyusun bukti kebenaran suatu pernyataan secara matematis berdasarkan definisi, prinsip dan teorema (Lestari, 2015). Mahasiswa jurusan matematika FMIPA Universitas Negeri Malang mengalami kesulitan dalam melakukan bukti formal dari suatu pernyataan pada matakuliah kalkulus I (Hidayanto, 2015).

Kesulitan dalam pembuktian umumnya ditemukan pada masalah pembuktian konsep baik dalam hal memahami bukti dari teorema, *lemma, corollary*, ataupun dalam hal menyelesaikan soal-soal pembuktian, adapun penyebab kesulitan tersebut antara lain: (1) kurangnya pemahaman mahasiswa terhadap konsep yang akan dibuktikan, (2) kurangnya pemahaman tentang metode-metode pembuktian yang akan digunakan, (3) kurangnya kemampuan dalam memanipulasi fakta-fakta yang diketahui dan menkaitkannya dengan yang akan dibuktikan serta (4) kurangnya kemampuan dalam menyusun alur/sistematika bukti tersebut (Minggi, Paduppai, & Assagaf, 2016; Salsabila & Hadi, 2015).

Pemahaman relasional memegang peran penting dalam pemahaman konsep. Dengan adanya pemahaman relasional maka seseorang tidak hanya sekedar dapat menggunakan konsep matematika namun juga memahami alasan di setiap prosedur yang dilakukan. Dalam pembuktian, pemahaman relasional akan membantu memahami bagaimana menggunakan konsep dalam pembuktian dan mengapa setiap proses dilakukan dalam pembuktian sehingga proses pembuktian dilakukan dengan benar (Skemp, 1978).

Skemp (1978) menggambarkan pemahaman relasional yaitu mengetahui apa yang harus dilakukan dan mengapa. Hal ini dapat diartikan bahwa pemahaman relasional adalah pemahaman mahasiswa untuk mengetahui prosedur yang akan digunakan dan memiliki alasan setiap langkah mengapa prosedur tersebut dilakukan. Pemikiran relasional tidak hanya berfokus pada prosedur untuk mendapatkan jawaban semata, namun pada pembelajaran pemahaman relasional ini akan meningkatkan pemahaman mahasiswa (Napaphun, 2012). Ada empat manfaat pemahaman relasional pada pembelajaran matematika antara lain: (1) memudahkan dalam menyelesaikan masalah yang lebih rumit; (2) memudahkan untuk mengingat dan memahami konsep matematika; (3) sebagai pemahaman yang memudahkan untuk mencapai tujuan pembelajaran; (4) pemahaman relasional merupakan sebuah pemahaman yang mampu menciptakan idea yang original (Skemp, 2006).

Mengingat manfaat pemahaman relasional maka diharapkan mahasiswa mampu mengembangkan pemahaman tersebut namun belajar untuk menumbuhkan pemahaman relasional sangatlah sulit. Mahasiswa harus membangun sebuah struktur konsep dari sebuah prinsip yang menghasilkan banyak rencana yang tak terbatas untuk menghasilkan sebuah konsep (Star & Stylianides, 2013). Menumbuhkan pemahaman relasional bukan sesuatu yang mudah namun juga membutuhkan waktu yang lama. Pemahaman relasional mampu mengembangkan empat hal antara lain: (1) mengembangkan pemahaman yang benar tentang konsep matematika; (2) melatih mahasiswa untuk biasa melihat masalah secara keseluruhan; (3) mengembangkan keterampilan dalam menggunakan prinsip dan konsep matematika; (4) mengembangkan kemampuan induktif (Napaphun, 2012).

Penelitian yang terkait dengan pemahaman relasional antara lain yaitu penelitian yang dilakukan oleh Bahar, Rahman, & Minggi (2012). Penelitian tersebut mengungkapkan bahwa subjek tinggi dan subjek sedang memiliki pemahaman relasional terhadap konsep limit, sedangkan subjek rendah memiliki pemahaman instrumental terhadap konsep limit. Penelitian yag dilakukan oleh Rahma, Mubarokah, & Aunillah (2015) mengungkapkan bahwa siswa SMPN 2 Buduran Sidoarjo dapat menyelesaikan masalah dengan konsep yang tepat akan tetapi siswa tidak mengetahui alasan atau dasar setiap langkah-langkah yang ditempuh. Hal ini menunjukkan bahwa pemahaman relasional siswa yang berkemampuan matematika tingkat tinggi, sedang maupun rendah masih sangat kurang. Penelitian yang dilakukan oleh Tatak, Kurniawan, & Rudhito (2016) mengungkapkan bahwa siswa mengalami kesulitan untuk berpikir relasional dalam menghubungkan antara masalah kontekstual dalam PMR terhadap materi fungsi linear terlebih pada penyajian data menggunakan grafik fungsi dimana siswa belum mampu menggunakan grafik untuk menentukan hasil fungsi pada permasalahan kontekstual.

Berdasarkan uraian di atas, rumusan masalah yang dikemukakan pada penelitian ini adalah bagaimana pemahaman relasional mahasiswa pada pembuktian induksi matematika. Beberapa alasan mengapa penelitian ini penting dilakukan antara lain: (1) berdasarkan paparan penelitian terdahulu bahwa belum ditemukan adanya penelitian yang mengkaitkan pemahaman relasional dengan pembuktian matematika, kebanyakan penelitian yang terdahulu tentang pembuktian yaitu menganalisis kesalahan dalam pembuktian atau menggunakan metode dan bahan ajar untuk meningkatkan kemampuan pembuktian; (2) mengingat pentingnya pemahaman relasional dalam pembelajaran matematika menurut Skemp (2006) maka penelitian ini perlu dilakukan.

Bab 2
Teori Skemp dan Teori Polya

A. Teori Belajar Skemp

RICHARD SKEMP adalah seorang ahli dalam bidang matematika dan psikologi, serta sebagai pelopor utama dalam Pendidikan Matematika yang pertama kali mengintegrasikan disiplin matematika, pendidikan dan psikologi. Ia lahir di Bristol 10 Maret 1919 dan meninggal di Coventry 22 Juni 1995, ia merupakan putra dari seorang Profesor AR Skemp dari University of Bristol, Skemp menikah pada tahun 1961 dengan seorang wanita bernama Valerie Watts. Skemp mendapatkan gelarnya sebagai seorang sarjana di Wellington Collegedi Berkshire, Inggris pada tahun 1932, dengan mendapatkan beasiswa terbuka di Jurusan Matematika di Hertford College, Oxford, pada tahun 1937-1939 dan tahun 1945-1947. Saat terjadinya perang Skemp turut andil dan bertugas di Sinyal Kerajaan di India hingga ia berhasil mencapai pangkat Kapten.

Skemp (1978) percaya bahwa anak-anak bisa belajar cerdas dari usia dini, menghasilkan kerangka kurikulum yang lengkap untuk usia 5-11 yang dikenal sebagai Kegiatan

Struktur di Belajar yang Cerdas. Pengembangan pendidikan matematika sebagai disiplin akademis berutang banyak kepada Richard Skemp untuk 40 tahun merintis kerja. Ketika ia mencapai gelar PhD dari Universitas Manchester pada tahun 1959, ia adalah salah satu dari segelintir dosen junior meneliti di bidang tersebut. Buku yang ditulis oleh Skemp yang berjudul "*The Psychology of Learning Mathematics*" pada tahun 1971 adalah salah satu buku terlaris di matematika di sekolah, yang telah diterjemahkan ke dalam lebih dari 10 bahasa. Misi seumur hidup Richard Skemp adalah untuk meningkatkan pengajaran matematika di kelas. Agar tercapainya dalam mendidik guru tentang sifat pembelajaran dan dengan menyediakan bahan ajar yang berkualitas tinggi, dihasilkan secara kolaboratif dan berdasarkan teori-teorinya. Dalam hal ini tidak begitu banyak ide-ide yang baru, dia mengakui berhutang kepada Jean Piaget dan lain-lain. Untuk Skemp pemikiran matematis setiap anak adalah penting, rasional dan menarik. Dia tidak mementingkan diri sendiri, tetapi memberi banyak perhatian terhadap pandangan guru utama di luar negeri atau kepada anak-anak yang berusia lima tahun yang masih belajar dan mengalami perkembangan. Dengan kemurahan hatinya, Richard Skemp memberi waktu kepada individu yang tak terhitung jumlahnya.

Skemp (1971) menyatakan bahwa pemahaman konsep matematika ada dua jenis, yaitu pemahaman instrumental dan pemahaman relasional. Pemahaman instrumental suatu konsep matematika berarti suatu pemahaman atas membedakan sejumlah konsep sebagai pemahaman konsep saling terpisah dan hanya hafal rumus dengan perhitungan sederhana. Sedangkan pemahaman relasional adalah dapat melakukan perhitungan secara bermakna pada permasalahan-permasalahan yang lebih luas.

Contoh: Dalam belajar 2x3 = 3x2 siswa dapat menggunakan potongan-potongan karton persegi. Atau melalui permainan. Pemahaman Skemp Richard Skemp adalah seorang ahli matematika yang kemudian belajar psikologi. Dia mengintegrasikan kedua disiplin, pendidikan dan psikologi untuk menjelaskan cara belajar matematika. Yang mendasari argumennya adalah bahwa peserta didik membangun schemata untuk menghubungkan apa yang mereka sudah tahu dengan pembelajaran dan pengetahuan yang baru. Menurut Skemp, matematika melibatkan hirarki yang luas tentang konsepnya. Kita tidak bisa mengetahui suatu materi konsep baru tanpa memahami materi konsep sebelumnya. Skemp juga mengemukakan bahwa emosi memainkan peran yang dominan dalam cara penyampaian materi dan penerimaan materi oleh peserta didik.

Siswa yang memiliki pemahaman instrumental saja belum dapat dikatakan memiliki pehamaman secara keseluruhan, seperti yang dikatakan oleh Skemp (1978) "*instrumental understanding, I would until recently not have regarded as understanding at all*". Pemahaman instrumental dikatakan juga sebagai *"rules without reasons".* Sedangkan siswa yang telah memiliki pemahaman relasional memiliki fondasi atau dasar yang lebih kokoh dalam pemahamannya. Jika siswa lupa dengan rumus, mereka masih memiliki peluang untuk menyelesaikan soal dengan cara lainnya. Menurut Skemp, pemahaman relasional dapat diartikan sebagai pemahaman yang memahami dua hal secara bersama-sama yaitu " *Knowing both what to do and why*".

Tabel 2.1 Pemahaman Konsep Matematika Oleh Skemp

	Pemahaman Instrumental	Pemahaman Relasional
1. Definisi	Kemampuan seseorang Menggunakan prosedur matematik untuk menyelesaikan suatu masalah tanpa mengetahui mengapa prosedur itu digunakan (*rules without reason).*	Kemampuan menggunakan suatu aturan dengan penuh kesadaran mengapa ia menggunakan aturan tersebut (*knowing what to do and why*)
2. Cara Menyampaikan Konsep	a. Hapalan b. Bergantung pada petunjuk c. Tidak menggunakan alat dan hanya berfokus pada perhitungan	a. Keterkaitan banyakide b. Membangun stuktur konseptual c. Aktivitas semantik, seperti mencari sebab, membuat induksi mencari prosedur alternatif dan sebagainya.
3. Kelebihan	a. Pemahaman instrumental lebih mudahdipahami b. *Reward* atau penghargaan dapat dengan cepat dan lebih jelas diberikan c. Siswa dapat memproleh jawaban dengan cepat	a. Lebih mudah disesuaikan untuk menyelesaikan tugas baru b. Lebih mudah untuk mengingat kembali c. Dapat menjadi tujuan yang efektif dalam dirisendiri d. Memiliki skema yang dapat diperluas
4. Contoh (siswa yang diberikan konsep mengenai luas segitiga dan persegi panjang)	Hafal rumus luas segitiga dan persegi panjang, tapi belum atau tidak tahu hubungan kedua rumus tersebut.	Dapat merumuskan sendiri luas segitiga dari luas persegi panjang karena dapat menghubungkan bahwa segitiga terbentuk dari persegi panjang yang dibagimenjadi dua bangun yang kongruen.

Sumber: Skemp (2006)

Berdasar pada pendapat Skemp di atas, kemampuan siswa dalam menyelesaikan sebuah soal matematika dapat dikategorikan sebagai pemahaman relasional dan dapat juga dikategorikan sebagai pemahaman instrumental dengan alasan berikut.

Siswa dapat dikategorikan sebagai pemahaman relasional jika siswa di samping ia sudah dapat menentukan hasil namun ia juga harus dapat menjelaskan mengapa hasilnya adalah seperti itu. Contohnya, untuk soal integral tak tentu. Siswa harus dapat menjelaskan bahwa integral tak tentu suatu fungsi $f(x) = dx$ adalah menentukan suatu fungsi $F(x)$ yang jika diturunkan hasilnya adalah $f(x)$. Ia harus dapat meyakinkan orang lain dan dirinya sendiri bahwa hasil integral tersebut adalah benar.

Siswa dapat dikategorikan hanya memiliki pemahaman instrumental, jika siswa hanya dapat menentukan hasil namun ia tidak dapat menjelaskan mengapa hasilnya adalah seperti itu. Karenanya, kemampuan yang seperti ini oleh Skemp belum dikategorikan sebagai pemahaman. Sedangkan pemahaman relasional oleh Skemp sudah dikategorikan sebagai pemahaman.

Setiap teori pembelajaran yang dikemukakan oleh para ahli pasti mempunyai kekurangan serta kelebihannya masing-masing termasuk teori pembeljaran yang dikemukakan oleh Skemp. Berikut ini adalah kekurangan dan kelebihan dari teori yang dikemukakan oleh Skemp.

- ♦ Kekurangan teori Skemp adalah : (1) pemahaman instrumental termasuk kedalam pemaham jangka pendek, (2) pemahaman rasional membutuhkan waktu yang sedikit lebih lama dan pemahaman yang lebih mendalam dalam proses pemahamannya, dan (3) teorinya Skemp tidak begitu banyak ide-ide baru.
- ♦ Kelebihan teori Skemp adalah (1) pemahaman Instrumental benar-benar berguna ketika Anda harus tahu bagaimana melakukan tugas tertentu dengan cepat, dan tidak terlalu khawatir tentang bagaimana

tugas ini cocok dengan tugas-tugas lain yang sejenis, (2) pemahaman relasional berguna ketika Anda ingin mengeksplorasi ide-ide lebih lanjut, yang tidak peduli tentang tujuan Anda, dan lebih peduli dengan proses, (3) pemahaman ini dalam jangka waktu yang panjang bukan hanya mengerti tapi juga paham apa yang terjadi dan kenapa hal tersebut terjadi, dan (4) Teori Skemp ini cocok digunakan untuk proses belajar dan mengajar Matematika.

Berdasarkan apa yang dijelaskan Skemp, inti belajar matematika adalah agar siswa memiliki pemahaman relasional di mana para siswa harus dapat melakukan sesuatu (apanya) namun ia juga harus dapat menjelaskan mengapa ia harus melakukan sesuatu seperti itu (mengapanya).

B. Teori Belajar Polya

Polya layak disebut matematikawan paling berpengaruh pada abad 20. Riset mendasar yang dilakukan pada bidang analisis kompleks, fisika matematikal, teori probabilitas, geometri dan kombinatorik banyak memberi sumbangsih bagi perkembangan matematika. Sebagai seorang guru yang piawai, minat mengajar dan antusiasme tinggi tidak pernah hilang sampai akhir hayatnya. Semasa di Zurich, karya-karya di bidang matematika sangat beragam dan produktif. Tahun 1918, mengarang makalah tentang deret, teori bilangan, sistem voting dan kombinatorik. Tahun berikutnya, menambah dengan topik-topik seperti astronomi dan probabilitas. Meskipun pikiran sepenuhnya ditumpahkan untuk topik-topik di atas, namun Polya mampu membuat hasil mengesankan pada fungsi-fungsi integral.

Tahun 1933, Polya kembali mendapatkan *Rocke feller Fellow ship* dan kali ini dia pergi ke Princeton. Saat di Amerika, Polya diundang oleh Blichfeldt untuk mengunjungi Stanford yang menarik minatnya. Kembali ke Zurich pada tahun 1940, namun situasi di Eropa menjelang perang dunia II, memaksa Polya kembali ke Amerika. Bekerja di universitas Brown dan Smith College selama 2 tahun, sebelum menerima undangan dari Stanford yang diterimanya dengan senang hati. Sebelum meninggalkan Eropa, Polya sempat mengarang buku *How to Solve It* yang ditulis dalam bahasa Jerman. Setelah mencoba menawarkan ke berbagai penerbit akhirnya dialihbahasakan ke dalam bahasa Inggris sebelum diterbitkan oleh Princeton. Buku ini ternyata menjadi buku best seller yang terjual lebih dari 1 juta copy dan kelak dialih bahasakan ke dalam 17 bahasa. Buku ini berisikan metode-metode sistematis guna menemukan solusi atas masalah yang dihadapi dan memungkinkan seseorang menemukan pemecahannya sendiri karena memang sudah ada dan dapat dicari.

Memecahkan suatu masalah merupakan suatu aktivitas dasar bagi manusia. Kenyataan menunjukkan, sebagian besar kehidupan kita adalah berhadapan dengan masalah-masalah. Kita perlu mencari penyelesaiannya. Bila kita gagal dengan suatu cara untuk menyelesaikan suatu masalah, kita harus mencoba menyelesaiakannya dengan cara lain. Kita harus berani menghadapi masalah untuk menyelesaiakannya. Polya (Hadi & Radiyatul, 2014) mengartikan pemecahan masalah sebagai satu usaha mencari jalan keluar dari satu kesulitan guna mencapai satu tujuan yang tidak begitu mudah segera untuk dicapai. Pemecahan masalah dapat berupa menciptakan ide baru, menemukan teknik atau produk baru. Bahkan didalam pembelajaran matematika, selain pemecahan masalah mempunyai arti khusus, istilah tersebut mempunyai interpretasi yang berbeda, misalnya menyelesaikan soal cerita yang tidak rutin dan mengaplikasikan matematika dalam kehidupan sehari-hari.

Polya mengajukan empat langkah fase penyelesaian masalah yaitu memahami masalah, merencanakan penyelesaian, menyelesaikan masalah dan melakukan pengecekan kembali semua langkah yang telah dikerjakan (Siahaan, Dewi, & Said, 2018; Netriwati, 2016). Fase memahami masalah tanpa adanya pemahaman terhadap masalah yang diberikan, siswa tidak mungkin menyelesaikan masalah tersebut dengan benar, selanjutnya para siswa harus mampu menyusun rencana atau strategi. Penyelesaian masalah, dalam fase ini sangat tergantung pada pengalaman siswa lebih kreatif dalam menyusun penyelesaian suatu masalah, jika rencana penyelesaian satu masalah telah dibuat baik tertulis maupun tidak. Langkah selanjutnya adalah siswa mampu menyelesaikan masalah, sesuai dengan rencana yang telah disusun dan dianggap tepat. Langkah terakhir dari proses penyelesaian masalah menurut polya adalah melakukan pengecekan atas apa yang dilakukan. Mulai dari fase pertama hingga hingga fase ketiga. Dengan model seperti ini maka kesalahan yang tidak perlu terjadi dapat dikoreksi kembali sehingga siswa dapat menemukan jawaban yang benar-benar sesuai dengan masalah yang diberikan.

Tingkat kesulitan soal pemecahan masalah harus di sesuaikan dengan tingkat kemampuan siswa. Disadari atau tidak setiap hari kita diperhadapkan dengan berbagai masalah yang dalam penyelesaiannya, sering kita dihadapkan dengan masalah–masalah yang tidak bisa diselesaikan dengan segera. Dengan demikian, tugas guru adalah membantu siswa dalam menyelesaikan masalah dengan spektrum yang luas yakni membantu siswa dalam memehami masalah, sehingga kemampuan dalam memahami konteks masalah bisa terus berkembang menggunakan kemampuan inkuiri dalam menganalisa alasan mengapa masalah itu muncul. Dalam matematika hal seperti itu biasanya berupa pemecahan masalah yang didalamnya termuat soal cerita untuk mengembangkan kemampuan siswa dalam pemecahan masalah hal yang perlu ditingkatkan adalah kemampuan menyangkut berbagai hal teknik dan strategi pemecah masalah, pengetahuan, keterampilan dan pemahaman merupakan elemen–elemen penting dalam belajar matematika terkadang guru menghadapi kesulitan dalam mengajarkan cara menyelesaikan masalah dengan baik. Sementara dipihak lain siswa mengalami kesulitan bagaimana menyelesaikan masalah yang diberikan guru, kesulitan ini muncul, karena mencari jawaban dipandang sebagai satu-satunya tujuan yang ingin dicapai, karena hanya terfokus pada jawaban.

Bab 3
Teori Skemp Tentang Pemahaman Relasional

SKEMP PERCAYA bahwa anak bisa belajar secara cerdas sejak usia dini, menghasilkan kerangka kurikulum lengkap untuk usia 5-11 tahun yang dikenal sebagai kegiatan terstruktur di cerdas belajar. Skemp meyakini bahwa agar belajar menjadi berguna bagi seseorang, sifat-sifat umum dari pengalaman harus dipadukan untuk membentuk suatu struktur konseptual atau suatu skema. Bagi guru, ini berarti bahwa struktur matematika harus disusun agar jelas bagi siswa sebelum mereka dapat menggunakan pengetahuan awal sebagai dasar untuk belajar pada tahap berikutnya, atau sebelum mereka menggunakan secara efektif pengetahuan mereka untuk menyelesaikan masalah tentang pentingnya struktur ini.

Skemp (1978), juga membedakan teori pemahaman relasional dan pemahaman instrumental. Skemp menyatakan bahwa pemahaman instrumental sejatinya belum termasuk pada kategori pemahaman, sedangkan pemahaman relasional sudah termasuk pada kategori pemahaman. Dimisalkan ada seorang siswa yang mampu menyelesaikan sebuah persoalan matematika, apakah siswa tersebut sudah memiliki pemahaman relasional atau hanya memiliki pemahaman instrumental?.

Berdasarkan permasalahan di atas Skemp menyimpulkan bahwa kemampuan siswa dalam menyelesaikan sebuah persoalan matematika dapat dikategorikan sebagai pemahaman relasional dan dapat juga dikategorikan sebagai pemahaman instrumental dengan alasan sebagai berikut:

1) dapat dikategorikan sebagai pemahaman relasional jika si siswa disamping ia sudah dapat menentukan hasil namun ia juga harus dapat menjelaskan mengapa hasilnya seperti itu;

2) dapat dikategorikan hanya sebagai pemahaman instrumental jika siswa hanya dapat menentukan hasil namun ia tidak dapat menjelaskan mengapa hasilnya seperti itu.

Siswa yang memiliki pemahaman relasional memiliki fondasi atau dasar yang lebih kokoh dalam pemahamannya tersebut. Jika siswa lupa dengan rumus, maka ia dapat menggunakan pemahamannya dengan cara coba-coba dan dapat mengecek kebenaran hasil yang ia dapat dengan membalikkan rumus.

Selama proses pembelajaran di kelas, para pendidik matematika diharapkan dapat memfasilitasi siswanya sedemikian rupa sehingga para siswa memiliki pemahaman relasional. Ada dua prinsip untuk matematika sekolah, yaitu;

a. prinsip pengajaran menyatakan bahwa pengajaran matematika yang efektif membutuhkan pemahaman terhadap pengetahuan siswa dan membutuhkan proses belajar, dan setelah itu menantang dan membantunya agar dapat belajar dengan baik.

b. prinsip pembelajaran menyatakan bahwa siswa harus belajar matematika dengan pemahaman secara aktif membangun pengetahuan baru berdasarkan pengalaman dan pengetahuan yang sudah dimilikinya.

Menurut Skemp (1978), belajar terpisah menjadi dua tahap. Tahap pertama dengan memanipulasi benda-benda akan memberikan dasar bagi siswa untuk belajar lebih lanjut untuk menghayati ide-ide. Skemp mendukung interaksi siswa dengan objek-objek fisik selama tahap-tahap awal mempelajari konsep. Pengalaman awal ini akan membentuk dasar bagi belajar berikutnya pada tahap kedua, yaitu pada tingkat yang abstrak. Menurut Richard Skemp, belajar matematika perlu dua tahap, yaitu sebagai berikut:

1) perlu menggunakan benda-benda konkret untuk memberikan basis bagi peserta didik dalam menghayati ide-ide matematika yang abstrak;

2) tingkat abstrak, yaitu mulai meninggalkan benda konkret untuk menuju ke pemahaman matematika yang memang memuat objek-objek abstrak.

Menurut Skemp (1971), inti belajar matematika adalah agar siswa memiliki pemahaman relasional dimana para siswa harus dapat melakukan sesuatu namun ia juga harus dapat menjelaskan mengapa ia harus melakukan sesuatu seperti itu. Jika siswa memiliki pemahaman relasional, ia memiliki fondasi atau dasar yang lebih kokoh dalam pemahamannya tersebut. Jikalau siswa lupa dengan rumus, maka ia masih punya peluang menyelesaikan soal dengan cara coba-coba. Sebagai tambahan, siswa dapat mengecek kebenaran hasil yang ia dapatkan dengan membalikkan rumus. Contoh, untuk soal integral dapat dicek hasilnya benar atau salah dengan mendifferensialkan hasilnya. Namun jika siswa hanya memiliki pemahaman instrumental, ia hanya bisa menghafalkan rumus dan tidak faham dengan konsep. Contoh, integral adalah anti differensial. Ketika ia lupa dengan rumus, maka ia tak punya peluang untuk mencoba-coba.

Bab 4
Pemahaman Relasional

PEMAHAMAN MERUPAKAN keadaan kognisi yang tercipta dari hubungan tata bahasa dan konsep matematika (Byers, 1980). Mengetahui bahwa sebuah fakta, konsep dan prinsip dalam matematika sehingga memperoleh sebuah makna dapat dikatakan sebuah pemahaman (Yoong, 1987). Davis (2015) menjelaskan bahwa pemahaman merupakan proses pengorganisasian dan pengintegrasian pengetahuan sesuai dengan seperangkat kriteria.

Pemahaman itu tidak mengandung jawaban atau prosedur yang salah sebagai keadaan permanen, melainkan sebagai tahap menuju pengetahuan independen (Walshaw, 2017). Pemahaman merupakan proses asimilasi ke dalam skema yang tepat sehingga memunculkan sifat subjektif dari pengetahuan, salah satu kriteria utama dari pemahaman adalah membentuk koneksi untuk menggunakan pengetahuan baru dalam berbagai situasi yang berbeda (Skemp, 1971). Menentukan nilai dari sebuah struktur konsep dengan pengalaman yang cukup, melakukan tindakan berdasarkan pengalaman, kemampuan sebagai sarana untuk menyelesaikan masalah yang berkelanjutan dan konsisten disebut pemahaman (Glasersfeld, 1983).

Berdasarkan pandangan para ahli di atas maka pemahaman adalah kemampuan untuk menyelesaikan masalah yang sedang dihadapi sehingga menemukan sebuah solusi. Skemp (1978) menggambarkan pemahaman relasional yaitu mengetahui apa yang harus dilakukan dan mengapa, dapat diartikan bahwa pemahaman relasional adalah pemahaman mahasiswa untuk mengetahui prosedur yang digunakan dan mengetahui alasan mengapa prosedur tersebut dilakukan. Sedangkan John, Jennifer, Louann, & Karen (2014) mendeskripsikan pemahaman relasional berarti memahami setiap konsep atau prosedur baru tidak hanya dipelajari, tapi juga berhubungan dengan gagasan yang telah dimiliki agar bisa mendapatkan koneksi dengan ide yang banyak. Menurut Minarni, Napitupulu, & Husein (2016) pemahaman relasional adalah kemampuan untuk menyimpulkan peraturan atau prosedur yang spesifik dari hubungan matematis yang lebih umum. Selain itu Weber (2002) berpandangan bahwa pemahaman relasional merupakan pemahaman sebuah gagasan informal pada konsep serta memahami definisi terkait konsep dan mengetahui alasan mengapa konsep tersebut benar. Woodruff (2005) mengartikan pemahaman relasional ialah pemahaman yang timbul dari fenomena interaksi perspektif relasional. Berdasarkan pandangan para ahli di atas maka pemahaman relasional ialah pemahaman mahasiswa menggunakan prosedur dan mengetahui mengapa menggunakannya.

Pemahaman relasional merupakan jaringan ide yang kaya. Pada saat proses penyelesaian masalah berdasarkan struktur pemahaman relasional, akan terjadi proses penguraian masalah kebagian-bagian yang lebih kompleks untuk mempermudah memecahkan masalah yang diberikan dan mengaitkan dengan konsep-konsep yang telah dipelajari.

Dengan demikian bagian tersebut dapat dipetakan membentuk skema atau jaringan yang saling berelasi antara satu dengan yang lainnya. Seperti yang dikatakan oleh Utomo (2010), pemahaman relasional adalah pemahaman terhadap keterkaitan antara pengetahuan konseptual dan pengetahuan prosedural yang dibentuk dan dikembangkan melalui pengaitan antara konsep yang satu dengan konsep lainnya, antara relasi konsep-konsep dengan konsep yang lain lagi, antara relasi konsep- konsep dengan relasi konsep-konsep lainnya.

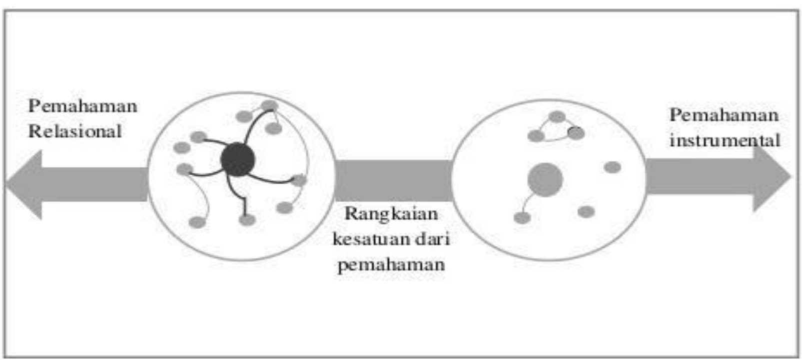
Jaringan ide pemahaman relasional dapat memberikan ilustrasi kepada kita bagaimana pemahaman relasional yang dimiliki siswa, bagaimana jaringan ide-ide yang dimiliki siswa untuk menyelesaikan suatu masalah matematika. Oleh karena itu, untuk mengetahui ilustrasi atau diskripsi bagaimana pemahaman relasional matematika yang dimiliki siswa dalam menyelesaikan masalah matematika adalah dengan menganalisis relasi-relasi antara konsep-konsep dan prosedur siswa dalam mengerjakan permasalahan matematika.

Bab 5
Pemahaman Relasional dan Instrumental

SKEMP (1978) MENGATEGORIKAN pemahaman menjadi dua jenis, yaitu pemahaman relasional dan pemahaman instrumental. Pemahaman relasional menurut skemp adalah "*Relational understanding is described as knowing both what to do ang why*", artinya kemampuan seseorang menggunakan suatu prosedur matematis yang berasal dari hasil menghubungkan berbagai konsep matematis yang relevan dalam menyelesaikan suatu masalah dan kemampuan menjelaskan mengapa prosedur tersebut dapat digunakan.

Pemahaman relasional merupakan jaringan ide yang kaya, terkait satu ide dengan ide yang lain secara benar serta menyadari prosesnya. Sedangkan pemahaman instrumental merupakan jaringan ide yang terpisah-pisah tanpa makna (Subanji, 2011; Walle & John, 2008; Fauziah, 2010). Menurut Utomo (2010), pemahaman relasional adalah pemahaman terhadap keterkaitan antara pengetahuan konseptual dan pengetahuan prosedural yang dibentuk dan dikembangkan melalui pengaitan antara konsep yang satu dengan konsep lainnya, antara relasi konsep-konsep dengan konsep yang lain lagi, antara relasi konsep- konsep dengan relasi konsep-konsep lainnya. Oleh karena itu, pemahaman relasional dan pemahaman instrumental keduanya perlu dimiliki oleh siswa.

Skemp mengolongkan pemahaman siswa berdasarkan kemampuan yang dimiliki siswa, siswa dikatakan mampu memahami secara instrumental jika siswa mampu mengingat kembali hal-hal yang masuk dalam tingkat ini adalah pengetahuan tentang fakta dasar, istilah, dan menggunakan hal-hal yang bersifat rutin (Hasan, 2012). Tingkat selanjutnya adalah pemahaman relasional. Pada tingkatan ini siswa sudah mampu menerapkan dengan tepat suatu ide matematika yang bersifat umum pada hal-hal yang khusus atau pada situasi baru.



Gambar 5.1 Pemahaman Relasional & Pemahaman Instrumental (Walle & John, 2008).

Pemahaman relasional harus dimiliki oleh siswa, karena dengan pemahaman relasional siswa dapat mengembangkan ide-ide yang dimilikinya untuk memecahkan soal matematika. Menurut (Walle & John, 2008), ide-ide matematika tidak dapat dituangkan kepada siswa yang pasif. Siswa harus belajar aktif untuk dapat belajar. Dalam kelas, siswa harus didorong untuk bergulat dengan ide baru, mencari koneksi antar ide, dan menganalisa idenya sendiri maupun ide temannya. Salah satu cara yang membuat siswa aktif belajar dengan mengkoneksikan beberapa ide yang telah dimiliki maupun ide-ide baru adalah dengan memberikan soal-soal non rutin atau dalam penyelesaiannya diperlukan kemampuan pemahaman yang tinggi, yang mengaitkan beberapa konsep dalam penyelesaian masalahnya. Selain itu, untuk menyelesaikan soal-soal matematika juga diperlukan pemahaman procedural (Ramalisa & Syafmen, 2014). Pengetahuan prosedural dibentuk dari dua bagian yang berbeda yang bersusun dari representasi simbol tentang matematika dan algoritma algoritma atau aturan-aturan untuk menyelesaikan tugas-tugas matematika. Hiebert dan Levefre (Utomo, 2010) pengetahuan prosedural adalah pengetahuan tentang simbol untuk merepresentasikan ide matematika serta aturan dan prosedur yang digunakan untuk menyelesaikan tugas matematika.

Oleh karena itu, Salah satu modal utama dalam mempelajari matematika adalah pemahaman relasional, karena siswa dapat mengaitkan beberapa konsep dengan konsep lainnya yang diimbangi dengan penguasaan pengetahuan prosedural dalam menyelesaikan soal-soal matematika. Hal ini diperjelas oleh pernyataan Ramalisa & Syafmen, (2014), yaitu pemahaman konsep yang tidak didukung oleh pengetahuan prosedural akan mengakibatkan siswa mempunyai intuisi yang baik tentang suatu konsep tetapi tidak mampu menyelesaikan suatu masalah. Salah satu ciri pengetahuan prosedural adalah adanya urutan langkah yang akan ditempuh yaitu sesudah suatu langkah akan diikuti langkah berikutnya.

Pemahaman relasional merupakan jaringan ide yang kaya, terkait satu ide dengan ide yang lain secara benar serta menyadari prosesnya. Sedangkan pemahaman instrumental merupakan jaringan ide yang terpisah-pisah tanpa makna (Subanji, 2011; Fauziah, 2010). Menurut (Utomo, 2010), pemahaman relasional adalah pemahaman terhadap keterkaitan antara pengetahuan konseptual dan pengetahuan prosedural yang dibentuk dan dikembangkan melalui pengaitan antara konsep yang satu dengan konsep lainnya, antara relasi konsep-konsep dengan konsep. Pemahaman relasional harus dimiliki oleh siswa, karena dengan pemahaman relasional siswa dapat mengembangkan ide-ide yang dimilikinya untuk memecahkan soal matematika. Menurut (Walle & John, 2008) ide-ide matematika tidak dapat dituangkan kepada pelajar yang pasif. Siswa harus belajar aktif untuk dapat belajar. Dalam kelas, siswa harus didorong untuk bergulat dengan ide baru, mencari koneksi antar ide, dan menganalisa idenya sendiri maupun ide temannya. Salah satu cara yang membuat siswa aktif belajar dengan mengkoneksikan beberapa ide yang telah dimiliki maupun ide-ide baru adalah dengan memberikan soal-soal non rutin atau dalam penyelesaiannya diperlukan kemampuan pemahaman yang tinggi, yang mengaitkan beberapa konsep dalam penyelesaian masalahnya. Selain itu, untuk menyelesaikan soal-soal matematika juga diperlukan pemahaman procedural (Ramalisa & Syafmen, 2014). Pengetahuan prosedural dibentuk dari dua bagian yang berbeda yang bersusun dari representasi simbol tentang matematika dan algoritma atau aturan-aturan untuk menyelesaikan tugas-tugas matematika. Hiebert dan Levefre (Utomo, 2010) pengetahuan prosedural adalah pengetahuan tentang simbol untuk merepresentasikan ide matematika serta aturan dan prosedur yang digunakan untuk menyelesaikan tugas matematika.

Oleh karena itu, salah satu modal utama dalam mempelajari matematika adalah pemahaman relasional, karena siswa dapat mengaitkan beberapa konsep dengan konsep lainnya yang diimbangi dengan penguasaan pengetahuan prosedural dalam menyelesaikan soal-soal matematika. Hal ini diperjelas oleh pernyataan Ramalisa & Syafmen, (2014), yaitu pemahaman konsep yang tidak didukung oleh pengetahuan prosedural akan mengakibatkan siswa mempunyai intuisi yang baik tentang suatu konsep tetapi tidak mampu menyelesaikan suatu masalah. Salah satu ciri pengetahuan prosedural adalah adanya urutan langkah yang akan ditempuh yaitu sesudah suatu langkah akan diikuti langkah berikutnya.

Pemahaman relasional merupakan jaringan ide yang kaya, terkait satu ide dengan ide yang lain secara benar serta menyadari prosesnya. Sedangkan pemahaman instrumental merupakan jaringan ide yang terpisah-pisah tanpa makna (Subanji, 2011; Fauziah, 2010). Menurut Utomo, (2010), pemahaman relasional adalah pemahaman terhadap keterkaitan antara pengetahuan konseptual dan pengetahuan prosedural yang dibentuk dan dikembangkan melalui pengaitan antara konsep yang satu dengan konsep lainnya, antara relasi konsep-konsep dengan konsep yang lain lagi, antara relasi konsep-konsep dengan relasi konsep-konsep lainnya, oleh karena itu, pemahaman relasional dan pemahaman instrumental keduanya perlu dimiliki oleh siswa. Menurut Skemp (1978), kemampuan siswa dalam menjawab pertanyaan pertama adalah kemampuan pemahaman instrumental, sedangkan kemampuan siswa dalam menjawab pertanyaan kedua adalah kemampuan pemahaman relasional.

Bab 6 Indikator Pemahaman Relasional

MENURUT ANWAR (2016) dan Keene, Glass, & Kim (2011) indikator pemahaman relasional yaitu: (1) siswa dapat mengantisipasi hasil pelaksanaan prosedur tanpa harus melakukannya dan mereka dapat mengantisipasi hubungan hasil yang diharapkan dengan hasil dari prosedur lain; (2) siswa dapat mengidentifikasi kapan sebaiknya menggunakan prosedur; (3) siswa dapat melaksanakan seluruh prosedur atau langkah yang dipilih dalam prosedur; (4) siswa memahami alasan mengapa suatu prosedur bekerja secara keseluruhan, siswa mengetahui motivasi atau alasan untuk langkah-langkah kunci dalam prosedur; (5) siswa dapat secara simbolis atau grafis memverifikasi kebenaran atau kewajaran hasil yang diakui pada prosedur tanpa mengulang prosedur; (6) siswa dapat membuat koneksi di dalam dan di seluruh representasi: simbolis, grafis, dan numberik.

Menurut Davis (2015) terdapat 10 indikator pemahaman relasional yaitu: (1) kemampuan melakukan prosedur; (2) melakukan prosedur tahap demi tahap; (3) Kelancaran dalam melakukan prosedur; (4) memperoleh hasil yang tepat; (5)

menunjukkan mampu melakukan prosedur; (6) mengetahui kapan menggunakan prosedur; (7) memiliki pengetahuan prasyarat yang dibutuhkan dalam melakukan prosedur; (8) mengetahui kesalahanpada prosedur; (9) memberikan argumen yang masuk akal dalam menggunakan prosedur; (10) mengenali bentuk soal baru yang dapat diselesaikan menggunakan prosedur. Berdasarkan paparan ahli diatas maka indikator pemahaman relasional adalah berdasarkan (Davis, 2015).

Tabel 6.1 Indikator Pemahaman Relasional

Kategori	Indikator Pemahaman Relasional
Prosedural	Kemampuan melakukan prosedur secara keseluruhan
	Kelancaran dalam melakukan prosedur
	Memperoleh hasil yang tepat
Konseptual	Menunjukkan mampu melakukan prosedur
	Mengetahui kapan menggunakan prosedur
	Memiliki pengetahuan prasyarat yang dibutuhkan dalam melakukan prosedur
	Mengetahui kesalahan pada prosedur
	Memberikan argumen yang logis dalam melakukan prosedur
	Mengenali bentuk soal baru yang dapat diselesaikan menggunakan prosedur

(Davis, 2015)

Bab 7
Induksi Matematika

INDUKSI MATEMATIKA merupakan suatu teknik yang dikembangkan dalam membuktikan suatu pernyataan yang berkaitan dengan objek matematika yang bersifat diskrit, misal teori bilangan, teori graf, kombinatorik (Itzkovitch & Ashkenazi, 2014; Putri, 2016). Prinsip induksi matematis dapat dijelaskan secara umum dalam dua tahap: (1) jika S (1) benar; (2).asumsi bahwa S (k) benar maka untuk semua bilangan bulat k $\geq$ 1, menyiratkan bahwa S (k + 1) benar, maka S (n) berlaku untuk semua bilangan bulat positif n. Dengan kata lain, kita memulai metode pembuktian dengan verifikasi langkah satu (langkah awal), kemudian di asumsikan bahwa S (k) benar untuk bilangan bulat tertentu yang dipilih secara sembarang k $\geq$ 1, yang dikenal sebagai asumsi induktif, pada langkah dua (langkah induksi dasar), kita menunjukkan bahwa anggapan bahwa S (k) benar menyiratkan bahwa S (k + 1) adalah benar (Michaelson, 2008; Spencer & Manuel, 2017). Secara umum terdapat tida tipe masalah yang sering diselesaikan dengan induksi.

Induksi matematika merupakan suatu teknik yang dikembangkan dalam membuktikan suatupernyataan yang berkaitan dengan objek matematika yang bersifat diskrit, misal teori bilangan, teori graf, kombinatorik (Itzkovitch & Ashkenazi, 2014; Putri, 2016). Prinsip induksi matematis dapat dijelaskan secara umum dalam dua tahap: (1). jika S (1) benar; (2).asumsi bahwa S (k) benar maka untuk semua bilangan bulat k e" 1, menyiratkan bahwa S (k + 1) benar, maka S (n) berlaku untuk semua bilangan bulat positif n. Dengan kata lain, kita memulai metode pembuktian dengan verifikasi langkah satu (langkah awal), kemudian di asumsikan bahwa S (k) benar untuk bilangan bulat tertentu yang dipilih secara sembarang k ≥ 1, yang dikenal sebagai asumsi induktif, pada langkah dua (langkah induksi dasar), kita menunjukkan bahwa anggapan bahwa S (k) benar menyiratkan bahwa S (k + 1) adalah benar (Michaelson, 2008; Spencer & Manuel, 2017). Secara umum terdapat tida tipe masalah yang sering diselesaikan dengan induksi matematika yaitu seri umum, habis dibagi dan ketidaksetaraan (Spencer & Manuel, 2017). Contoh Kasus pembuktian dengan induksi matematika. Buktikan dengan induksi matematika bahwa untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$ berlaku $S(n): 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

Penyelesaian: 1). Step dasar: tunjukan bahwa $\mathrm{S}(1)$ benar. $2\mathrm{n} - 1 = 2(1) - 1 = 2 - 1 = 1 = 1^2 = \mathrm{n}^2$. Jadi benar untuk $\mathrm{S}(1)$. 2). Step induksi: Asumsikan S(k) benar yaitu (k): 1 + 3 + 5 + ... + (2k) – 1) = k^2 (k): 1 + 3 + 5 + ... + (2k – 1) = k^2 (1) Maka untuk semua bilangan bulat k ≥ 1 yaitu S (k + 1) benar juga. Untuk S (k + 1) akan diselidiki sebagai berikut:

$$S(k+1): 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + (2(k+1) - 1) = (k+1)^2$$

Terlihat pada persamaan (1) yaitu $S(k): 1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$ ada di persamaan (2) maka untuk $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)$ dipersamaan (2) disubtitusikan menjadi k^2 seperti dibawah ini.

Terlihat pada persamaan (1) yaitu ada di persamaan (2) maka untuk dipersamaan (2) disubtitusikan menjadi seperti dibawah ini.

$$
\begin{aligned}
1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2(k+1)-1) \\
&= \underbrace{1+3+5+\cdots+(2k-1)}_{k^2}+(2(k+1)-1) \\
&= k^2+(2(k+1)-1) \\
&= k^2+(2k+2-1) \\
&= k^2+2k+1 \\
&= (k+1)^2
\end{aligned}
$$

benar untuk S(k + 1) maka untuk semua bilangan bulat $n \geq 1$ berlaku $S(n)$:1 + 3 + 5 + ... + $(2n - 1) = n^2$.

Bab 8 Pembuktian Dengan Induksi Matematika

PEMBUKTIAN MATEMATIKA adalah sebuah demonstrasi yang menunjukan bahwa sebuah pernyataan bernilai benar berdasarkan asumsi yang benar dimana asumsi tersebut bisa berupa aksioma, definisi maupun hukum logika (Alcock & Inglis, 2010; Stylianides & Stylianides, 2009). Sedangkan menurut Feriyanto (2018) pembuktian matematika merupakan serangkaian argumen logis yang menjelaskan kebenaran sebuah pernyataan dan argumen ini bisa diturunkan dari premis pernyataan itu sendiri, definisi dan teorema lainnya, dimana logis berarti setiap langkah dalam argumen dibenarkan oleh langkah-langkah sebelumnya. Menurut Hales (2008) pembuktian matematika ialah suatu proses untuk memeriksa nilai kebenaran dari suatu pernyataan yang dimana setiap kalimatnya terdiri dari kalimat logis yang telah diperiksa setiap langkah sampai pada aksioma fundamental matematika. Selain itu menurut Stefanowicz (2014) pembuktian matematika merupakan sebuah cara yang terdiri dari urutan pernyataan logis, yang saling berkaitan antara pernyataan dan memberi penjelasan mengapa pernyataan tersebut benar yang dimana pernyataan tersebut bisa berupa teorema, aksioma maupun definisi yang akan digunakan untuk menunjukan nilai kebenaran dari pernyataan tersebut. Menurut Varghese (2017) pembuktian matematika ialah sebuah prosedur, deduksi aksiomatis, yang mengikuti serangkaian penalaran dari asumsi awal sampai pada kesimpulan akhir. –

Skemp (2006) mengungkapkan "Untuk memahami sesuatu berarti mengasimilasinya ke dalam skema yang tepat". Dalam artikelnya yang terkenal, "Pemahaman relasional dan pemahaman instrumental", dijelaskan pengkategorian pemahaman atas dua jenis pemahaman yaitu: (1) pemahaman instrumental dan (2) pemahaman relasional. Pemahaman instrumental didefinisikan sebagai "Aturan tanpa alasan" atau dengan kata lain kemampuan seseorang menggunakan prosedur matematik untuk menyelesaikan suatu masalah tanpa mengetahui mengapa prosedur itu digunakan, dalam hal ini seseorang hanya memahami urutan pengerjaannya atau algorimanya. Pemahaman relasional didefinisikan sebagai "Mengetahui apa yang dilakukan dan mengetahui alasannya" atau dengan kata lain kemampuan menggunakan suatu aturan dengan penuh kesadaran mengapa ia menggunakan aturan tersebut, pada tahapan tingkatan ini seseorang tidak hanya sekedar tahu dan hapal tentang sesuatu hal tetapi juga mengetahui bagaimana dan mengapa hal itu dapat terjadi.

Salah satu faktor yang mempengaruhi kemampuan pembuktian induksi matematika adalah pemahaman konsep. Untuk dapat membuktikan induksi matematika sangat diperlukan pemahaman konsep yang baik, semakin bagus pemahaman konsep yang dimiliki akan membantu melakukan pembuktian induksi matematika dengan benar (Kurniati &

Murniati, 2016). Pemahaman relasional memegang peran penting dalam pemahaman konsep. Dengan adanya pemahaman relasional maka seseorang tidak hanya sekedar dapat menggunakan konsep matematika namun juga memahami alasan di setiap prosedur yang dilakukan. Dalam pembuktian induksi matematika, pemahaman relasional akan lebih membantu memahami bagaimana menggunakan konsep dalam pembuktian induksi matematika dan mengapa setiap proses dilakukan dalam pembuktian induksi sehingga proses pembuktian induksi dilakukan dengan benar (Skemp, 1978). Pemahaman relasional pada pembuktian induksi matematika adalah pemahaman mahasiswa menggunakan prosedur induksi dan mengetahui mengapa menggunakan prosedur tersebut.

Davis (2015) mengemukakan bahwa indikator pemahaman relasional merupakan turunan dari indikator pemahaman prosedural dan konseptual, adapun indikator pemahaman prosedural dalam penelitian ini adalah (1) kemampuan melakukan prosedur secara keseluruhan; (2) kelancaran dalam melakukan prosedur; (3) memperoleh hasil yang tepat. Dimana pemahaman konseptual dalam penelitian ini adalah (1) menunjukkan mampu melakukan prosedur; (2) mengetahui kapan menggunakan prosedur; (3) memiliki pengetahuan prasyarat yang dibutuhkan dalam melakukan prosedur; (4) mengetahui kesalahan pada prosedur; (5) memberikan argumen yang logis dalam melakukan prosedur; (6) mengenali bentuk soal baru yang dapat diselesaikan menggunakan prosedur. Maka dalam penelitian ini dapat deskripsikan bahwa indikator pemahaman relasional pada pembuktian induksi matematika sebagai berikut:

Tabel 8.1 Indikator Pemahaman Relasional pada Pembuktian Induksi Matematika

Kategori	Indikator Pemahaman Relasional	Deskripsi
Prosedural	Kemampuan melakukan prosedur secara keseluruhan	kemampuan melakukan step dasar membuktikan berlakunya $n = 1$ dan step induksi mengasumsikan benar untuk $n = k$ serta membuktikan berlakunya $n = k + 1$.
	Kelancaran dalam melakukan prosedur	kelancaran dalam melakukan step dasar membuktikan berlakunya $n = 1$ dan step induksi mengasumsikan benar untuk $n = k$ serta membuktikan berlakunya $n = k + 1$.
	Memperoleh hasil yang tepat	Memperolah hasil yang tepat berdasarkan prosedur induksi yaitu step dasar membuktikan berlakunya $n = 1$ dan step induksi mengasumsikan benar untuk $n = k$ serta membuktikan berlakunya $n = k + 1$.
Konseptual	Menunjukkan mampu melakukan prosedur	Mampu menjelaskan step dasar membuktikan berlakunya $n = 1$ dan step induksi mengasumsikan benar untuk $n = k$ serta membuktikan berlakunya $n = k + 1$.
	Mengetahui kapan menggunakan prosedur	Mengetahui kapan menggunakan prosedur induksi
	Memiliki pengetahuan prasyarat yang dibutuhkan dalam melakukan prosedur	Memiliki pengetahuan prasyarat yang dibutuhkan dalam melakukan step dasar membuktikan berlakunya $n = 1$ dan step induksi mengasumsikan benar untuk $n = k$ serta membuktikan berlakunya $n = k + 1$.
	Mengetahui kesalahan pada prosedur	Mengetahui kesalahan pada step dasar membuktikan berlakunya $n = 1$ dan step induksi mengasumsikan benar untuk $n = k$ serta membuktikan berlakunya $n = k + 1$.
	Memberikan argumen yang logis dalam melakukan prosedur	Memberikan argumen yang logis dalam melakukan step dasar membuktikan berlakunya $n = 1$ dan step induksi mengasumsikan benar untuk $n = k$ serta membuktikan berlakunya $n = k + 1$.
	Mengenali bentuk soal baru yang dapat diselesaikan menggunakan prosedur	Mengenali bentuk soal baru yang dapat diselesaikan menggunakan prosedur induksi

(Adaptasi dari Davis, 2015)

Bab 9
Metode Penelitian

PENDEKATAN YANG digunakan dalam penelitian ini adalah pendekatan kualitatif dengan jenis penelitian deskriptif. Penelitian ini mengaji pemahaman relasional siswa pada pembuktian induksi matematika berdasarkan data yang diperoleh pada saat penelitian, kemudian data tersebut dianalisis dan dideskripsikan dalam pembahasan.

Subjek dalam penelitian ini 3 mahasiswa pendidikan matematika semester 5 Universitas Muhammadiyah Malang tahun 2018, yaitu satu subjek dengan indeks prestasi (IP) tinggi, satu subjek dengan indeks prestasi (IP) sedang dan satu subjek dengan indeks prestasi (IP) rendah untuk melihat variasi dari masing-masing subjek, dimana subjek yang dipilih telah menempuh mata kuliah analisis real pada topik induksi matematika. Objek dalam penelitian ini yaitu pemahaman relasional pada pembuktian induksi matematika. Selain 3 orang subjek penelitian tersebut, hasil pekerjaan mahasiswa lain pada semester yang sama juga dihitung persentasenya. Persentase pencapaian untuk masing-masing indikator pemahaman relasional pada tiga kelompok yang berbeda. Baik kelompok mahasiswa IP tinggi, IP sedang dan IP rendah.

Instrumen penelitian ini berupa tes uraian pembuktian dengan induksi matematika sedangkan wawancara digunakan untuk mengetahui kemampuan argumentasi mahasiswa pada pembuktian dengan induksi matematika serta untuk memperkuat hasil tes. Tes terdiri dari 3 soal pembuktian dengan induksi matematika untuk mengukur pemahaman relasional. Soal dibuat berdasarkan indikator pemahaman relasional. Pedoman wawancara dalam penelitian ini digunakan untuk melengkapi dan menguatkan data hasil tes. Pertanyaan-pertanyaan pada metode wawancara disusun secara garis besar dan tidak terstruktur.

Kreadibilitas data perlu dilakukkan untuk membuktikan apakah yang diamati oleh peneliti benar-benar sesuai dengan apa yang sesungguhnya terjadi di lapangan. Penelitian ini menggunakan triangulasi metode yaitu tes dan wawancara. Data yang diperoleh dari tes harus dikonfirmasi dengan hasil wawancara.

Prosedur penelitian secara garis besar dibagi menjadi tiga tahap, tahap pertama yaitu persiapan, tahap kedua adalah pelaksanaan dan tahap ketiga adalah tahap penyusunan laporan. Pada tahap ini kegiatan yang dilakukan adalah: 1) pemberian tes pembuktian induksi matematika; 2) melakukan wawancara dengan mahasiswa yang dipilih mengetahui kemampuan argumen siswa. Pada tahap penyusunan laporan, setelah data diperoleh langkah selanjutnya: 1) menganalisis data hasil tes dan wawancara; 2) memaparkan data dan hasil.

Teknik analisa data dalam penelitian ini melalui tiga alur kegiatan yaitu reduksi data, penyajian data dan penarikan kesimpulan. Ketiga tahap tersebut saling berkaitan dan berulang-ulang selama dan sesudah pengumpulan data penelitian. Proses reduksi data dalam penelitian ini adalah: 1) memilah-milah data yang penting dan kurang penting; dan 2) mengaitkan data yang penting dari hasil wawancara dengan hasil tes yang diperoleh mahasiswa. Pada intinya wawancara ini digunakan untuk mendapatkan informasi yang mendalam tentang pemahaman relasional pada pembuktian induksi matematika.

Penyajian data dalam penelitian ini berdasarkan hasil dari reduksi data. Data yang sudah direduksi disajikan dalam bentuk uraian atau teks naratif. Penyajian data tersebut memberi kemudahan pembaca dalam memahami fenomena yang terjadi, karena data terorganisir serta tersusun dalam pola hubungan. Peneliti mengemukakan kesimpulan penelitian yang didukung oleh data yang valid dan analisa terhadap data yang diperoleh.

Selain data didiskripsikan secara teks naratif hasil jawaban mahasiswa terhadap tes dan hasil wawancara untuk 3 subjek utama penelitian, data juga dipaparkan dalam bentuk persentase pencapaian untuk setiap indikator pemahaman rasional. Baik untuk mahasiswa kategori kemampuan tinggi, kemampuan sedang dan kemampuan rendah. Dari 41 mahasiswa, ada 10 mahasiswa berkemampuan tinggi, 19 kemampuan sedang, dan 12 berkemampuan rendah. Berdasarkan hasil tes dan hasil wawancara, pemahaman relasional mahasiswa dikelompokkan pada kategori sangat baik, baik, dan tidak baik sebagaimana tabel berikut ini.

Tabel 9.1 Kategori Pemahaman Relasional

Skala Persentase	Kategori
75% $\leq$ Persentase $\leq$ 100%	Sangat Baik
50% $\leq$ Persentase < 75%	Baik
25% $\leq$ Persentase < 50%	Tidak Baik
0% $\leq$ Persentase $\leq$ 25%	Sangat Tidak Baik

Diadaptasi dari (Azizah, Sulianto, & Cintang, 2018)

Berdasarkan indikator pemahaman relasional, sebagaimana yang ada pada tabel 8.1, kategori tabel 9.1 dimodifikasi menurut indikator pemahaman relasional sebagai berikut.

Tabel 9.2 Kemampuan Melakukan Prosedur Secara Keseluruhan

Skala Persentase	Kategori
75% $\leq$ Persentase $\leq$ 100%	Sangat Baik
50% $\leq$ Persentase < 75%	Baik
25% $\leq$ Persentase < 50%	Tidak Baik
0% $\leq$ Persentase $\leq$ 25%	Sangat Tidak Baik

Tabel 9.3 Indikator Kelancaran Dalam Melakukan Prosedur

Skala Persentase	Kategori
75% $\leq$ Persentase $\leq$ 100%	Sangat Lancar
50% $\leq$ Persentase < 75%	Lancar
25% $\leq$ Persentase < 50%	Tidak Lancar
0% $\leq$ Persentase $\leq$ 25%	Sangat Tidak Lancar

Tabel 9.4 Indikator Memperoleh Hasil Yang Tepat

Skala Persentase	Kategori
$75\% \leq$ Persentase $\leq 100\%$	Sangat Tepat
$50\% \leq$ Persentase $< 75\%$	Tepat
$25\% \leq$ Persentase $< 50\%$	Tidak Tepat
$0\% \leq$ Persentase $\leq 25\%$	Sangat Tidak Tepat

Untuk indikator menunjukkan mampu melakukan prosedur, mengetahui kapan menggunakan prosedur, memiliki pengetahuan prasyarat yang dibutuhkan dalam melakukan prosedur, mengetahui kesalahan pada prosedur, memberikan argumen yang logis dalam melakukan prosedur, dan mengenali bentuk soal baru yang dapat diselesaikan menggunakan prosedur. Indikator diatas menggunakan tabel di bawah ini.

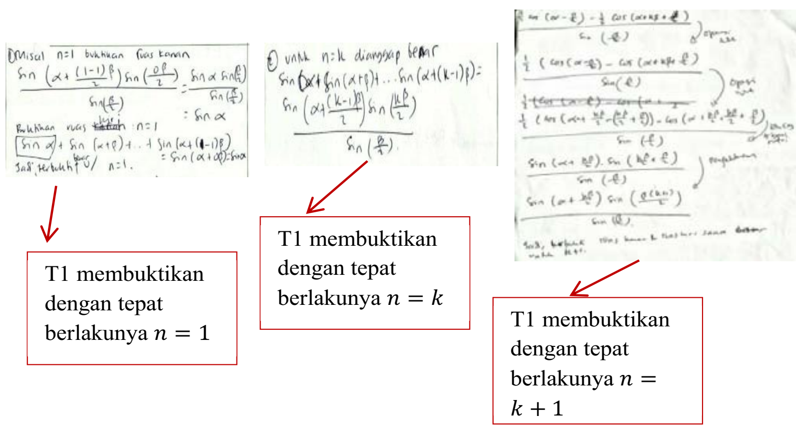
Tabel 9.5 Kategori Pemahaman Konseptual

Skala Persentase	Kategori
$75\% \leq$ Persentase $\leq 100\%$	Sangat Baik
$50\% \leq$ Persentase $< 75\%$	Baik
$25\% \leq$ Persentase $< 50\%$	Tidak Baik
$0\% \leq$ Persentase $\leq 25\%$	Sangat Tidak Baik

Bab 10
Analisis Pemahaman Relasional

BERIKUT INI adalah hasil pekerjaan mahasiswa berkemampuan tinggi dalam menyelesaikan tugas menggunakan induksi matematika.

a. Kemampuan melakukan prosedur induksi



Gambar 10.1. Subjek T1 Mampu Melakukan Prosedur Induksi Dengan Tepat

Gambar 10.1 menunjukkan bahwa subjek T1 mampu melakukan prosedur induksi dengan tepat pada soal satu yaitu mampu membuktikan berlakunya $n = 1$ dengan tepat pada step dasar, dan mampu melakukan step induksi dengan tepat yaitu mampu mengamsumsikan benar untuk $n = k$ dengan tepat dan mampu membuktikan berlakunya $n = k + 1$ dengan tepat. Hal ini diperkuat pula dengan data wawancara yang menunjukkan bahwa T1 mampu melakukan prosedur induksi dengan tepat pada soal satu sebagai berikut:

Peneliti : *Jelaskan bagaimana anda menyelesaikan soal satu ?*

T1 : *Pertama saya mengsubtitusikan nilai* $n = 1$ *pada pernyataan soal satu sehingga memperoleh nilai* $\sin\alpha$ *pada kedua persamaan artinya berlaku* $n = 1$*. Selanjutnya saya mengsubtitusikan nilai* $n = k$ *dianggap benar pada kedua persamaan, memperoleh* $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \cdots + \sin(\alpha+(k-1)\beta) = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{(k-1)\beta}{2}\right)\sin(\frac{k\beta}{2})}{\sin(\frac{\beta}{2})}$ *kemudian saya mengsubtitusikan nilai* $n = k + 1$ *memperoleh hasil* $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \cdots + \sin(\alpha+(k)\beta) = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{(k)\beta}{2}\right)\sin(\frac{(k+1)\beta}{2})}{\sin(\frac{\beta}{2})}$ *selanjutnya dari persamaan ruas kanan, saya membuktikan* $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \cdots + \sin(\alpha+k\beta) = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{(k+1)\beta}{2}\right)}{\sin(\frac{\beta}{2})}$ *dan terbukti benar berlakunya* $n = k + 1$.

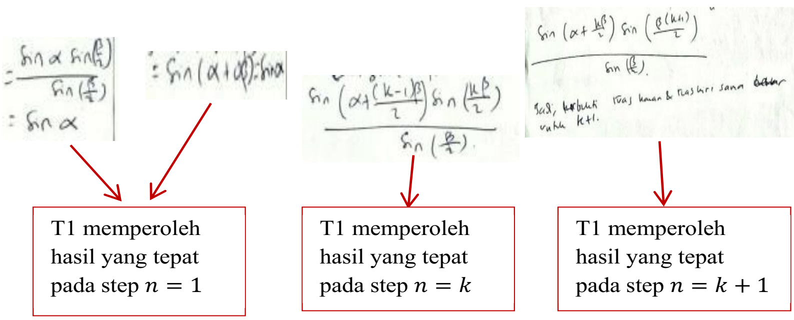
b. Kelancaran dalam melakukan prosedur

Subjek T1 lancar dalam melakukan prosedur induksi pada soal satu yaitu lancar dalam melakukan step dasar membuktikan berlakunya $n = 1$ tanpa menghadapi masalah yang berarti, dan lancar dalam step induksi yaitu lancar dalam melakukan pengamsumsian benar untuk $n = k$ dan membuktikan berlakunya $n = k + 1$. Subjek T1 mampu melakukan prosedur induksi dengan lancar pada soal satu yaitu penyelesaian soal relatif cepat, tidak ada hambatan saat mengerjakan soal, cekatan dalam menyelesaikan soal. Hasil wawancara menunjukkan subjek lancar dalam melakukan prosedur pada soal satu, sebagai berikut.

Peneliti : *Apakah anda menemukan kesulitan dalam menyelesaikan soal satu ?*

T1 : *Tidak pak, saya sering menyelesaikan soal induksi sebelumnya dan saya juga pahaman dengan identitas operasi kosinus trigonometri .*

c. Memperoleh hasil yang tepat



Gambar 10.2. Menunukkan Subjek T1 memperoleh hasil yang tepat

Gambar 10.2 menunjukkan Subjek T1 memperoleh hasil yang tepat pada soal satu yaitu mampu membuktikan pernyataan soal satu benar dimana pada step dasar memperoleh hasil yang tepat setelah subtitusi $n = 1$, memperoleh hasil yang tepat pada step induksi dalam mengasumsikan benar untuk $n = k$, dan tepat dalam membuktikan berlakunya $n = k + 1$. Seperti. Hasil wawancara menunjukkan bahwa subjek T1 memperoleh hasil yang tepat pada soal satu sebagai berikut.

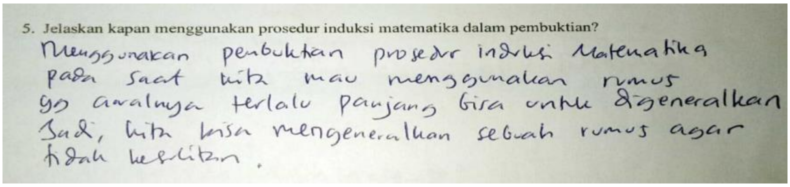
Peneliti : *Jelaskan hasil yang anda peroleh pada soal satu?*
T1 : *Hasil yang saya peroleh soal satu adalah terbukti benar untuk* $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \cdots + \sin(\alpha + (n-1)\beta) = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{(n-1)\beta}{2}\right)\sin(\frac{n\beta}{2})}{\sin(\frac{\beta}{2})}$ *karena terbukti benar untuk* $n = 1$*, benar untuk mengasumsikan untuk* $n = k$ *dan terbukti benar untuk* $n = k + 1$

d. Menunjukkan mampu melakukan prosedur induksi

Subjek T1 menunjukkan mampu melakukan prosedur dengan tepat pada soal satu yaitu mampu menjelaskan dengan tepat step dasar membuktikan berlakunya $n = 1$, menjelaskan dengan tepat step induksi yaitu mengasumsikan benar untuk $n = k$ dan membuktikan berlakunya $n = k + 1$. Hasil wawancara menunjukkan bahwa subjek T1 menunjukkan mampu melakukan prosedur induksi dengan tepat pada soal satu sebagai berikut.

Peneliti : *Tunjukkan kepada saya bagamana anda menyelesaikan soal satu ?*
T1 : *Pertama kita mengsubtitusikan* $n = 1$ *pada pernyataan soal satu sehingga kedua persamaan pada pernyataan tersebut menghasilkan* $\sin x$ *selanjutnya mengsubtitusikan* $n = k$ *pada pernyataan satu diperoleh* $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \cdots + \sin(\alpha+(k-1)\beta) = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{(k-1)\beta}{2}\right)\sin(\frac{k\beta}{2})}{\sin(\frac{\beta}{2})}$ *kemudian saya mengsubtitusikan nilai* $n = k + 1$ *memperoleh hasil* $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \cdots + \sin(\alpha+(k)\beta) = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{(k)\beta}{2}\right)\sin(\frac{(k+1)\beta}{2})}{\sin(\frac{\beta}{2})}$ *selanjutnya dari persamaan ruas kanan saya membuktikan* $\sin\alpha + \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha+2\beta) + \cdots + \sin(\alpha+k\beta) = \frac{\sin\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{(k+1)\beta}{2}\right)}{\sin(\frac{\beta}{2})}$ *dan terbukti benar berlakunya* $n = k + 1$.

e. Mengetahui kapan harus menggunakan prosedur induksi


5. Jelaskan kapan menggunakan prosedur induksi matematika dalam pembuktian?

Menggunakan pembuktan prosedur induksi Matematika pada saat kita mau menggunakan rumus yg awalnya terlalu panjang bisa untuk digeneralkan Jadi, kita bisa mengeneralkan sebuah rumus agar tidak kesulitan.

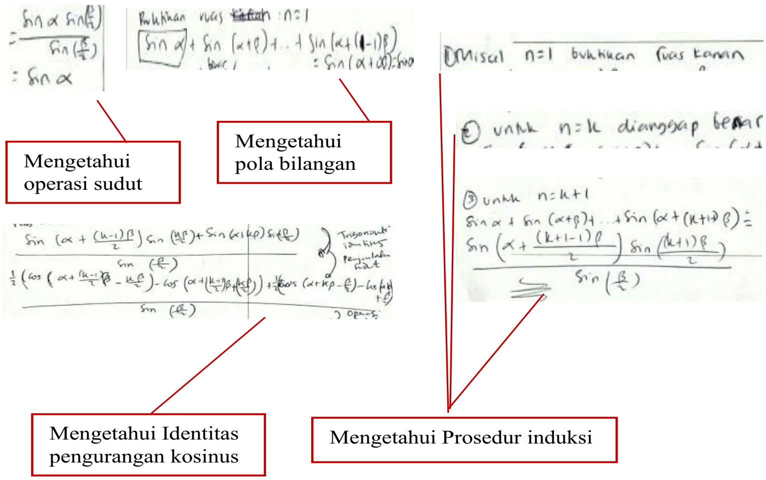
Gambar 10.3 Menunjukkan Bahwa Subjek T1 Mengetahui Kapanmenggunakan Prosedur Induksi Dengan Tepat

Gambar 10.3 menunjukkan subjek T1 mengetahui kapan harus menggunakan prosedur induksi dengan tepat bahwa penggunaan induksi dapat digunakan ketika ingin menggeneralisasikan rumus/teori/persamaan dan pernyataan yang panjang menjadi lebih sederhana serta membuktikan suatu kebenaran umum menjadi khusus. Hasil wawancara juga menunjukkan bahwa subjek T1 mengetahui kapan menggunakan prosedur induksi dengan tepat sebagai berikut.

Peneliti : *Jelaskan kapananda harus menggunakan prosedur induksi ?*

T1 : *Induksi merupakan metode pembuktian yang digunakan ketika kita ingin mengeneralisasikan suatu pernyataan/rumus/teorema/persamaan/kebenaran yang panjang menjadi lebih serderhana atau dari pernyataan umum menjadi khusus.*

f. Memiliki pengetahuan prasyarat yang dibutuhkan saat melakukan prosedur induksi



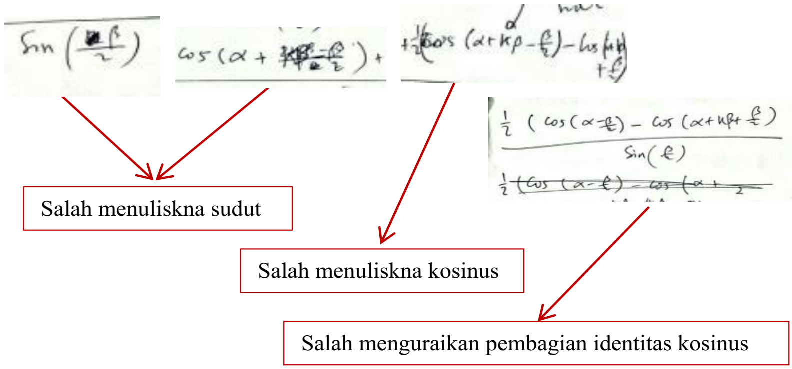
Gambar 10.4 Menunjukkan Bahwa Subjek T1 Memiliki Pengetahuan Prasyarat Yang Dibutuhkan Saat Melakukan prosedur Induksi

Gambar 10.4 menunjukkan subjek T1 memiliki pengetahuan prasyarat yang dibutuhkan saat melakukan prosedur induksi pada soal satu dengan tepat karena dari penyelesaian yang telah dilakukan terlihat subjek memiliki pengetahuan prasyarat seperti operasi bilangan bulat, prosedur induksi, pola bilangan, identitas pengurangan kosius, operasi sudut. Hasil wawancara juga menunjukkan bahwa subjek T1 memahami pengetahun prasyarat untuk menyelesaikan soal satu dengan tepat.

P : *Jelaskan pengetahuan prasyarat apa yang perlu diketahui untuk dapat menyelesaikan soal satu dan soal dua?*

T1 : *Pengetahuan prasyarat yang diperlukan untuk menyelesaikan soal satu adalah operasi bilangan bulat, operasi sudut, prosedur induksi, pola bilangan, identitas pengurangan cosinus.*

g. Mengetahui kesalahan pada prosedur induksi

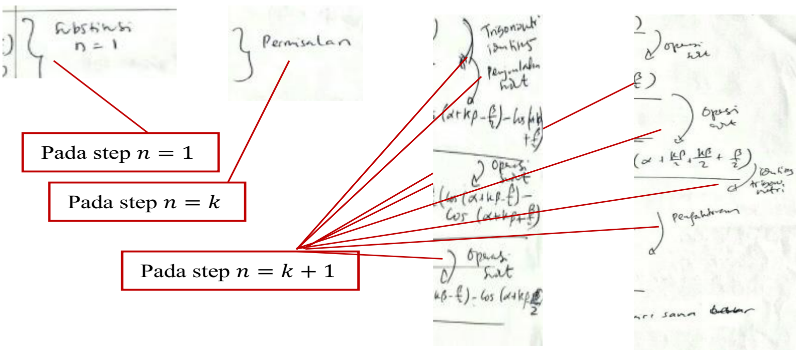


Gambar 10.5 Menunjukkan Bahwa Subjek T1 Mengetahui Kesalahan Yang Dilakukan Pada Prosedur Induksi Dengan Tepat

Gambar 10.5 menunjukkan subjek T1 mengetahui kesalahan dalam melakukan prosedur induksi pada soal satu dengan tepat karena menyadari kesalahan yang dilakukan seperti salah menuliskan sudut, salah menuliskan kosinus, salah menguraikan pembagian identitas kosinus dan mengetahui tidak terdapat kesalahan dalam melakukan prosedur karena melakukan pengecekan kembali. Hasil wawancara menunjukkan bahwa subjek T1 mampu mengetahui kesalahan pada prosedur induksi soal satudengan tepat sebagai berikut:

Peneliti	:	*Apakah anda mengetahui bahwa terdapat kesalahan pada prosedur induksi yang anda lakukan dan sebutkan kesalahan-kesalahn tersebut ?*
T1	:	*Iya pak saya mengetahuinya, saya salah menuliskan sudut makanya saya coret, saya salah menuliskan sinus kemudian saya ganti, salah dalam menguraikan pembagian identitas kosinus kemudian saya coret setelah menyelesaikannya saya menecek kembali pekerjaan saya agar tidak terdapat kesalahan lagi .*

h. Memberikan argumen yang logis dalam melakukan prosedur induksi



Gambar 10.6 Menunjukkan Subjek T1 Mampu Memberikan Argumen Yang Logis Dalam Melakukan Prosedur Induksi

Gambar 10.6 menunjukkan subjek T1 memberikan argumen yang logis dalam melakukan prosedur induksi pada soal satu yaitu memberikanpenjelasan yang logis pada pembuktian step dasar berlakunya $n = 1$, memberikan penjelasan yang logis pada pembuktian step induksi mengasumsikan benar untuk $n = k$ dan membuktikan berlakunya $n = k + 1$. Hasil wawancara menunjukkan bahwa subjek T1 memberikan argumen yang logis dalam melakukan prosedur induksi sebagai berikut:

Peneliti : *Jelaskan secara logis bagaimana anda menyelesaikan soal satu ?*

T1 : *Pertama saya mengsubtitusin* $n = 1$ *pada ruas kanan, melakukan pengurangan, dan pembagian sudut sinusselanjutnya pada ruas kiri melakukan subtitusi, mengetahui pola bilangan, melakukan pengurangan dan penjumlahan. Kedua saya mengsubtitusikan* $n = k$ *pada ruas kanan dan kiri pernyataan satu. Ketiga saya mengsubtitusikan* $n = k + 1$*kemudian dari persamaan ruas kiri saya uraikan menjadi penjumlahan nilai dari* $\frac{\sin\left(\alpha+\frac{(k-1)\beta}{2}\right)\sin(\frac{k\beta}{2})}{\sin(\frac{\beta}{2})} + \sin(\alpha +$

$k\beta$), kemudian melakukan perkalian sinus, penjumlahan pecahan sinus, mengubah ke identitas pengurangan kosinus, mengoperasik sudut kosinus, melakuka manipulasi sudut kosinus, mengubah ke identitas perkalian sinus, dan operasi sudut sinus sehingga diperoleh bahwa terbukti berlaku $n = k + 1$.

i. Mengenali bentuk soal baru yang dapat diselesaikan menggunakan prosedur induksi

Subjek T1 mengenali bentuk soal baru yang dapat diselesaikan menggunakan prosedur induksi dengan tepat, menurutnya soal satu merupakan soal baru yang belum pernah ditemuin atau diselesaikan karena soal induksi menurutnya soal yang identik dengan suku banyak dengan angka-angka yang rumit namun tidak berkaitan dengan trigonometri, subjek T1 mengenali bahwa soal satu dapat diselesaikan dengan induksi karena soal satu mengeneralkan persamaan yang panjang menjadi persamaan yang sederhana. Hasil wawancara juga menunjukkan bahwa subjek T1 mampu mengenali bentuk soal baru yang dapat diselesaikan menggunakan prosedur induksi dengan tepat, sebagai berikut:

Peneliti	:	*Mengapa soal satu dapat diselesaikan menggunakan induksi ?*
T1	:	*Karena soal satu memiliki pola bilangan dan juga disuruh membuktikan sebuah pernyataan yang didalamya terdapat sebuh penyederhanaa persamaan yang panjang menjadi persamaan yang sederhana.*

Bab 11
Pemahaman Rasional dan Induksi Matematika

BERIKUT INI adalah hasil analisis dan deskripsi pemahaman relasional mahasiswa pada pembuktian induksi matematika. Adapun indikator pemahaman relasional yaitu (1) kemampuan melakukan prosedur secara keseluruhan; (2) kelancaran dalam melakukan prosedur; (3) memperoleh hasil yang tepat; (4) menunjukkan mampu melakukan prosedur; (5) mengetahui kapan menggunakan prosedur; (6) memiliki pengetahuan prasyarat yang dibutuhkan dalam melakukan prosedur; (7) mengetahui kesalahan pada prosedur; (8) memberikan argumen yang masuk akal dalam menggunakan prosedur; (9) mengenali bentuk soal baru yang dapat diselesaikan menggunakan prosedur.

Berikut ini adalah deskripsi pemahaman realasional masing-masing subjek dengan indeks prestasi tinggi, sedang dan rendah.

Tabel 11.1 Pemahaman Relasional Mahasiswa Pendidikan Matematika

Pemahaman Relasional					
Indek Prestasi (IP)	Tes			Rata-rata	Kategori
	1	2	3		
Tinggi	100%	100%	97%	99%	Sangat Baik
Sedang	75%	75%	72%	74%	Baik
Rendah	31%	31%	31%	31%	Tidak Baik

Mahasiswa dengan kemampuan matematika yang tinggi memiliki pemahaman relasional yang sangat baik, mahasiswa yang memiliki kemampuan matematika yang sedang memiliki pemahaman relasional yang baik sedangkan mahasiswa dengan kemampuan matematika rendah memiliki pemahaman relasional yang tidak baik. Hal ini tidak sejalan dengan penelitian Rahma, Mubarokah, & Aunillah (2015) yang mengungkapkan bahwa siswa dengan kemampuan matematika tinggi, sedang dan rendah memiliki pemahaman relasional yang tidak baik. Mahasiswa dengan indeks prestasi yang tinggi dan sedang mampu menuliskan sebuah konsep secara prosedural serta mampu menjelaskan sebuah konsep secara konseptual, hal ini sejalan pula dengan penelitian Bahar et al., (2012) yang mengatakan bahwa mahasiswa dengan indeks prestasi yang tinggi dan sedang mampu menuliskan dan menjelaskan konsep limit fungsi di satu titik dengan tepat.

Menurut Skemp (2006) salah satu kelebihan pemahaman relasional adalah sebagai alat yang memudahkan untuk mencapai tujuan pembelajaran matematika, dengan kata lain mahasiswa yang memiliki pemahaman relasional yang rendah akan mengalami kesulitan dalam mencapai tujuan pembelajaran matematika.

Bab 12
Pemahaman Relasional Kategori Prosedural

SEBAGAIMANA DITERANGKAN oleh Davis (2015) bahwa pemahaman relasional terdiri dari dua kategori, yaitu kategori Prosedural dan Konseptual. Pada bagian ini peneliti mencermati berbagai indikator pemahaman relasional, yaitu kemampuan mahasiswa menggunakan prosedur dan kelancaran mahasiswa menggunakan prosedur dalam menyelesaikan masalah. Selanjutnya mencermati indikator kemampuan mahasiswa mendapatkan jawaban yang tepat. Berikut ini adalah data persentase pemahaman relasional mahasiswa pada kategori Prosedural pada masing-masing indikator.

Tabel 12.1 Indikator Kemampuan Melaksanakan Prosedur

Kemampuan melakukan prosedur secara keseluruhan					
Indeks Prestasi	Tes			Rata -rata	Kategori
	1	2	3		
Tinggi	80%	98%	95%	91%	Sangat Baik
Sedang	75%	70%	75%	73%	Baik
Rendah	45%	35%	40%	40%	Tidak Baik

Tabel 12.2 Indikator Kelancaran Dalam Melakukan Prosedur

Kelancaran dalam melakukan prosedur					
Indeks Prestasi	Tes			Rata - rata	Kategori
	1	2	3		
Tinggi	98%	95%	95%	96%	Sangat Lancar
Sedang	75%	78%	70%	74%	Lancar
Rendah	55%	45%	47%	49%	Tidak Lancar

Sebagaimana tertera pada tabel di atas, mahasiswa berkemampuan tinggi sangat lancar dalam melaksanakan prosedur penyelesaian. Mahasiswa berkemampuan sedang lancar dalam melaksanakan prosedur penyelesaian, dan mahasiswa berkemampuan rendah tidak lancar dalam melaksanakan prosedur penyelesaian.

Tabel 12.3 Indikator Memperoleh Hasil Yang Tepat

Memperoleh hasil yang tepat					
Indeks Prestasi	Tes			Rata - rata	Kategori
	1	2	3		
Tinggi	95%	95%	93%	94%	Sangat Tepat
Sedang	75%	75%	73%	74%	Tepat
Rendah	50%	40%	50%	47%	Tidak tepat

Berdasarkan isi pada tabel di atas, mahasiswa berkemampuan tinggi mampu mendapatkan hasil dengan sangat tepat. Mahasiswa berkemampuan sedang mendapatkan hasil yang tepat, dan mahasiswa berkemampuan rendah mendapatkan hasil yang tidak tepat.

Bab 13
Pemahaman Relasional Kategori Konseptual

PADA BAGIAN ini peneliti mencermati berbagai indikator pemahaman relasional, yaitu kemampuan mahasiswa memahami prosedur dan bilamana menggunakan prosedur dalam menyelesaikan masalah. Selanjutnya mencermati indikator pemahaman mahasiswa tentang prasyarat menggunakan prosedur dan kesalahan yang terjadi dalam menggunakan prosedur. Terakhir mencermati indikator kemampuan mahasiswa dalam memberikan argumentasi logis penggunaan prosedur dan kemampuan mahasiswa menunjukkan soal baru yang bisa menggunakan prosedur itu. Berikut ini adalah data persentase pemahaman relasional mahasiswa pada kategori Konseptual pada berbagai indikator.

Tabel 13.1 Indikator Menunjukkan Mampu Melakukan Prosedur

Menunjukkan mampu melakukan prosedur					
Indeks Prestasi	Tes			Rata -rata	Kategori
	1	2	3		
Tinggi	100%	93%	95%	96%	Sangat Baik
Sedang	80%	77%	80%	79%	Baik
Rendah	50%	40%	40%	43%	Tidak Baik

Sebagaimana tertera pada tabel di atas, mahasiswa berkemampuan tinggi mampu melaksanakan prosedur penyelesaian dengan sangat baik. Mahasiswa berkemampuan sedang baik dalam melaksanakan prosedur penyelesaian, dan mahasiswa berkemampuan rendah tidak baik dalam melaksanakan prosedur penyelesaian.

Tabel 13.2 Indikator Mengetahui Kapan Menggunakan Prosedur

Mengetahui Kapan Menggunakan Prosedur					
Indeks Prestasi	Tes			Rata - rata	Kategori
	1	2	3		
Tinggi	100%	98%	95%	98%	Sangat Baik
Sedang	75%	80%	82%	79%	Baik
Rendah	50%	45%	43%	46%	Tidak Baik

Berdasarkan tabel di atas, mahasiswa berkemampuan tinggi mengetahui dengan sangat baik kapan menggunakan prosedur. Mahasiswa berkemampuan sedang mengetahui dengan baik kapan menggunakan prosedur, dan mahasiswa berkemampuan rendah tidak baik dalam mengetahui kapan menggunakan prosedur.

Tabel 13.3 Indikator Memiliki Pengetahuan Prasyarat Yang Dibutuhkan Dalam Melakukan Prosedur

Memiliki Pengetahuan Prasyarat Yang Dibutuhkan Dalam Melakukan Prosedur					
Indeks Prestasi	Tes			Rata - rata	Kategori
	1	2	3		
Tinggi	100%	95%	100%	98%	Sangat Baik
Sedang	80%	75%	82%	79%	Baik
Rendah	45%	46%	44%	45%	Tidak Baik

Sebagaimana tertera pada tabel di atas, mahasiswa berkemampuan tinggi mengetahui dengan sangat baik prasyarat menggunakan prosedur. Mahasiswa berkemampuan sedang mengetahui dengan baik prasyarat untuk menggunakan prosedur penyelesaian dan mahasiswa berkemampuan rendah tidak mengetahui dengan baik prasyarat menggunakan prosedur penyelesaian.

Tabel 13.4 Indikator Mengetahui Kesalahan Pada Prosedur

Mengetahui Kesalahan Pada Prosedur					
Indeks Prestasi	Tes			Rata -rata	Kategori
	1	2	3		
Tinggi	92%	85%	82%	86%	Sangat Baik
Sedang	85%	85%	80%	83%	Sangat Baik
Rendah	35%	60%	50%	48%	Tidak Baik

Sebagaimana tertera pada tabel di atas, mahasiswa berkemampuan tinggi mampu dengan sangat baik mengetahui ada tidaknya kesalahan dalam melaksanakan prosedur penyelesaian. Sedangkan mahasiswa berkemampuan sedang mengetahui dengan sangat baik ada tidaknya kesalahan dalam melaksanakan prosedur penyelesaian dan mahasiswa berkemampuan rendah tidak mengetahui dengan baik ada tidaknya kesalahan dalam melaksanakan prosedur penyelesaian.

Tabel 13.5 Indikator Memberikan Argumen Yang Logis Dalam Melakukan Prosedur

Memberikan Argumen Yang Logis Dalam Melakukan Prosedur					
Indeks Prestasi	Tes			Rata -rata	Kategori
	1	2	3		
Tinggi	95%	98%	95%	96%	Sangat Baik
Sedang	78%	75%	70%	74%	Baik
Rendah	50%	45%	50%	47%	Tidak Baik

Berdasarkan tabel di atas, mahasiswa berkemampuan tinggi mampu dengan sangat baik memberikan argumen yang logis dalam melaksanakan prosedur penyelesaian. Mahasiswa berkemampuan sedang mampu dengan baik memberikan argumen yang logis dalam melaksanakan prosedur penyelesaian dan mahasiswa berkemampuan rendah tidak mampu memberikan argumen yang logis dalam melaksanakan prosedur penyelesaian.

Tabel 13.6 Indikator Mengenali Bentuk Soal Baru Yang Dapat Diselesaikan Menggunakan Prosedur

Mengenali Bentuk Soal Baru Yang Dapat Diselesaikan Menggunakan Prosedur					
Indeks Prestasi	Tes			Rata - rata	Kategori
	1	2	3		
Tinggi	93%	97%	95%	95%	Sangat Baik
Sedang	78%	70%	75%	74%	Baik
Rendah	50%	40%	40%	43%	Tidak Baik

Sebagaimana tertera pada tabel di atas, mahasiswa berkemampuan tinggi mampu dengan sangat baik mengenali soal baru yang dapat diselesaikan dengan prosedur penyelesaian. Mahasiswa berkemampuan sedang mampu dengan baik mengenali soal baru yang dapat diselesaikan dengan prosedur, dan mahasiswa berkemampuan rendah tidak mampu mengenali soal baru yang dapat diselesaikan dengan prosedur penyelesaian.

Bab 14
Penutup

MAHASISWA DENGAN kemampuan matematika tinggi memiliki pemahaman relasional yang sangat baik karena mampu melakukan prosedur induksi dengan sangat lancar dan memperoleh hasil yang sangat tepat. Mahasiswa berkemampuan tinggi mampu melakukan prosedur dengan sangat baik dan mampu mengetahui dengan sangat baik kapan menggunakan prosedur induksi. Mahasiswa berkemampuan tinggi mengetahui dengan sangat baik pengetahuan prasyarat yang dibutuhkan dalam melakukan prosedur induksi, mengetahui dengan sangat baik kesalahan dalam prosedur induksi, mampu dengan sangat baik dalam memberikan argumen yang logis dalam melakukan prosedur induksi. Mahasiswa berkemampuan tinggi mampu mengenali dengan sangat baik bentuk soal baru yang dapat diselesaikan menggunakan prosedur induksi.

Mahasiswa dengan kemampuan matematika sedang memiliki pemahaman relasional yang baik karena lancar dalam melakukan prosedur induksi, dan memperoleh hasil yang tepat. Mahasiswa berkemampuan sedang mampu melakukan prosedur dengan baik, dan mengetahui kapan menggunakan prosedur induksi dengan baik. Mahasiswa berkemampuan sedang juga mengetahui pengetahuan prasyarat yang dibutuhkan dalam melakukan prosedur induksi dengan baik, dan mengetahui kesalahan pada prosedur induksi dengan sangat baik. Mahasiswa berkemampuan sedang dapat memberikan argumen yang logis dalam melakukan prosedur induksi dengan baik, dan dapat mengenali bentuk soal baru yang dapat diselesaikan menggunakan prosedur induksi dengan baik.

Mahasiswa dengan kemampuan matematika rendah memiliki pemahaman relasional tidak baik karena tidak lancar dalam melakukan prosedur induksi, dan memperoleh hasil yang tidak tepat. Mahasiswa berkemampuan rendah menunjukkan tidak mampu melakukan prosedur dan tidak mengetahui kapan menggunakan prosedur induksi. Mahasiswa berkemampuan rendah tidak mengetahui prasyarat yang dibutuhkan dalam melakukan prosedur induksi dan tidak mengetahui kesalahan pada prosedur. Mahasiswa berkemampuan rendah tidak mampu memberikan argumen yang logis dalam melakukan prosedur induksi dan tidak mengenali bentuk soal baru yang dapat diselesaikan menggunakan prosedur induksi.

Daftar Pustaka

Alcock, L., & Inglis, M. (2010). Visual Considerations In The Presentation Of Mathematical Proofs. *Seminar.Net-International Journal of Media, Technology and Lifelong Learning*, *6*(1), 43–59.

Anwar, R. B. (2016). Mathematical Representation by Studens in Bulding Relational Understanding on Concept of Area and Perimeter of Rectangle. *Journal Educational Research and Reviews*, *11*(21), 202–208.

Azizah, M., Sulianto, J., & Cintang, N. (2018). Analisis Keterampilan Berpikir Kritis Siswa Sekolah Dasar Pada Pembelajaran Matematika Kurikulum 2013. *Jurnal Penelitian Pendidikan*, *35*(1), 61–70.

Bahar, E. E., Rahman, A., & Minggi, I. (2012). Analisis Pemahaman Mahasiswa Terhadap Konsep Limit Fungsi di Satu Titik (Studi Kasus pada Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA UNM). *Sainsmat*, *1*(2), 181–190.

Byers, V. (1980). What does it mean to understand mathematics? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *11*(1), 1–10.

Davis, E. J. (2015). A Model for Understanding Understanding in Mathematics. *National Council of Teachers of Mathematics*, *26*(1), 13–17.

Feriyanto. (2018). The Ability of Students Mathematical Proof in Determining the Validity of Argument Reviewed from Gender Differences. In *Journal of Physics* (pp. 1–7). Institute Of Physics.

Glasersfeld, E. von. (1983). Learning as Constructive Activity. In *Proceedings of the 5th Annual Meeting of the North American Group of Psychology in Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 41–101).

Hadi, S., & Radiyatul. (2014). Metode Pemecahan Masalah Menurut Polya Untuk Mengembangkan Di Sekolah Menengah Pertama. *Jurnal Pendidikan Matematika*, *2*(1), 53–61.

Hales, T. (2008). Formal proof. *Notices of the AMS*, *55*(11), 1370–1380.

Hasan, Q. A. (2012). Rekonstruksi Pemahaman Konsep Pembagian Pada Siswa Berkemampuan Rendah. *Prosiding SNMPM Universitas Sebelas Maret*, 609–708.

Hernadi, J. (2008). Metode Pembuktian dalam Matematika. *Pendidikan Matematika*, *2*(1), 1–13.

Hidayanto, E. (2015). Kesulitan Mahasiswa dalam Melakukan Pembuktian Teorema. In *Seminar Nasional Matematika UM* (pp. 1–10). Malang: Universitas Negeri Malang.

Itzkovitch, E., & Ashkenazi, Y. (2014). Proof by Mathematical Induction. *Internasional Journal Of Innovation and Research In Educational Sciences*, *1*(3), 186–190.

John A, V. de W., Jennifer M, B.-W., Louann H, L., & Karen S, K. (2014). *Teaching Student-Centered Mathematics-Developmentally Approprite Instruction for Grades 6-8 (Volume III) Edition 2* (2nd Editio). Boston: Pearson.

Keene, K. A., Glass, M., & Kim, J. H. (2011). Identifying And Assessing Relational Understanding In Ordinary Differential Equations. In *Proceedings - Frontiers in Education Conference, FIE* (pp. 1–12). Rapid City: Researchgate.

Kurniati, A. H., & Murniati. (2016). Deskripsi Kemampuan Penalaran Matematika Siswa ditinjau dari Pemahaman Konsep Siswa. *Jurnal Pedagogy*, *1*(2), 38–45.

Lestari, K. E. (2015). Analisis Kemampuan Matematika Mahasiswa Menggunakan Pendekatan Induktif-Deduktif pada Mata Kuliah Analisis Real. *Jurnal Kajian Pendidikan Dan Pengajaran*, *1*(2), 128–135.

Michaelson, M. (2008). A Literature Review of Pedagogical Research on Mathematical Induction. *Australian Senior Mathematics Journal*, *22*(2), 57–62.

Miksalmina. (2012). Penerapan Induksi Matematika Dalam Pembuktian Matematika. *Jurnal Bina Bangsa Getsempena Banda Acer*, *III*(2), 69–75.

Minarni, A., Napitupulu, E. E., & Husein, R. (2016). Mathematical Understanding And Representation Ability Of Public Junior High School In North Sumatra. *Journal on Mathematics Education*, *7*(1), 43–56.

Minggi, I., Paduppai, D., & Assagaf, S. F. (2016). Penyebab Kesulitan Mahasiswa dalam Pembuktian Matematika. *Jurnal Penelitian Pendidikan INSANI*, *19*(1), 18–2.

Napaphun, V. (2012). Relational Thinking/: Learning Arithmetic in order to Promote Algebraic Thinking. *Journal of Science and Mathematics*, *35*(2), 84–101.

Perbowo, K. S., & Pradipta, T. R. (2017). Pemetaan Kemampuan Pembuktian Matematis Sebagai Prasyarat Mata Kuliah Analisis Real Mahasiswa

Pendidikan Matematika. *KALAMATIKA Jurnal Pendidikan Matematika*, *2*(1), 81–90.

Putri, R. A. (2016). Problematika dalam Pembuktian Pernyataan Menggunakan Prinsip Induksi Matematika serta Alternatif Penyelesaiannya. *Seminar Nasional Matematika Dan Pendidikan Matematika UNY 2015*.

Putu, L., & Harini, I. (2016). Penggunaan Mind Map dalam Pembuktian Matematika. *Jurnal Matematika*, *6*(1), 56–67.

Rahma, U., Mubarokah, L., & Aunillah. (2015). Profil Pemahaman Relasional Siswa dalam Memecahkan Masalah Matematika di Tinjau dari Kemampuan Matematika. *Jurnal Pendidikan Matematika*, *3*(2), 133–150.

Ramalisa, Y., & Syafmen, W. (2014). Analisis Pengetahuan Prosedural Siswa Tipe Kepribadian Sensing Dalam menyelesaikan Soal Materi Sistem Persamaan Linear Dua Variabel. *Edumatica*, *4*(1), 30–36.

Salsabila, E., & Hadi, I. (2015). Pembekalan Pemahaman Metode Pembuktian Matematika dan Penerapan Strategi Abduktif-Deduktif Untuk Mengembangkan Kemampuan Membuktikan Konsep Aljabar Abstrak Pada Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA UNJ, *11*(1), 15–24.

Siahaan, E. M., Dewi, S., & Said, H. B. (2018). Analisis Kemampuan Pemecahan Masalah Matematis Berdasarkan Teori Polya Ditinjau Dari Gaya Kognitif Field Dependent Dan Field Independent Pada Pokok Bahasan Trigonometri Kelas X SMA N 1 Kota Jambi. *Jurnal Pendidikan Matematika*, *2*(2), 100–110.

Skemp, R. (1971). *The Psychology of Learning Mathematics*. Harmondsworth/ : Penguin.

Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *The Arithmetic Teacher*, *26*(3), 9–15.

Skemp, R. R. (2006). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Journal Nayional Council of Teachers of Mathematics (NCTM)*, *12*(2), 88–95.

Spencer, T., & Manuel, K. (2017). Proof By Mathematical Induction/ : Professional Practice For Secondary Teachers, *26th Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teacher* (pp. 5–124). Australiam: The Australian Association of Mathematics Teacher.

Star, J. R., & Stylianides, G. J. (2013). Procedural and Conceptual Knowledge: Exploring the Gap Between Knowledge Type and Knowledge Quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *13*(2), 169–181.

Stefanowicz, A. (2014). Proofs and Mathematical Reasoning. Book, London: University of Birmingham.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). Proof Constructions And Evaluations. *Educ Stud Math*, *72*(2), 237–253.

Suandito, B. (2017). Bukti Informal dalam Pembelajaran Matematika. *Jurnal Pendidikan Matematika Aljabar*, *8*(1), 13–23.

Subanji. (2011). Matematika Sekolah dan Pembelajarannya. *J-TEQIP*, *2*(1), 1–12.

Syafri, S. F. (2017). Kemampuan Representasi Matematis dan Kemampuan Pembuktian Matematika. *Jurnal Edunmath*, *3*(1), 49–55.

Tatak, A., Kurniawan, H., & Rudhito, M. A. (2016). Kemampuan Berpikir Relasional Siswa dalam Mengerjakan Soal Kontekstual dengan Pendekatan Realistik Pada Topik Fungsi Linear. *Kreano*, *7*(2), 136–144.

Utomo, D. P. (2010). Pengetahuan Konseptual dan Prosedural dalam Pembelajaran Matematika. *Makalah Disampaikan Pada Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika Universitas Muhammadiyah Malang Tanggal 30 Januari 2010*.

Varghese, T. (2017). Proof, Proving and Mathematics Curriculum. *Journal Tansformations*, *3*(1), 1–30.

Walle, V. De, & John, A. (2008). *Matematika Pengembangan Pengajaran, Jilid 1, Edisi Keenam*. New York: Longman.

Walshaw, M. (2017). Understanding Mathematical Development Through Vygotsky. *Research in Mathematics Education*, *19*(3), 293–309.

Weber, K. (2002). The Role Of Instrumental And Relational Understanding In Proofs About Group Isomorphisms. *Proceedings from the 2nd International Conference for the Teaching of Mathematics* (pp. 1–9). New Jersey: The State University of New Jersey.

Woodruff, E. (2005). Manifold Relational Understanding: Moving Beyond the Mind as Container Metaphor in Educational Technology. In *Forum American Bar Association* (pp. 1–9). Toronto, Canada.

Yoong, W. K. (1987). Aspects of Mathematical Understanding. *Singapore Journal Of Education*, *8*(2), 45–55.

Glosarium

A

Aksioma

Pernyataan yang dapat diterima sebagai kebenaran tanpa pembuktian

Asimilasi

Proses kognitif di mana seseorang mengintegrasikan persepsi, konsep ataupun pengalaman baru ke dalam skema atau pola yang sudah ada dalam pikirannya

C

Corollary

Sebuah proposisi yang mana secara langsung diperoleh dari suatu teorema yang sudah kita buktikan sebelumnya

D

Deduktif

Bermula dengan penjabaran tentang hal-hal umum kemudian menjurus ke hal khusus

H

Hirarki

Urutan tingkatan atau jenjang jabatan (pangkat kedudukan)

I

Induktif

Bermula dengan penjabaran tentang hal-hal khusus kemudian menjurus ke hal umum

Independen

Yang Berdiri Sendiri Atau Tidak Terikat.

Inkuiri

Proses bertanya dan mencari tahu jawaban terhadap pertanyaan ilmiah yang diajukannya

Interpretasi

Pemberian kesan, pendapat, atau pandangan teoretis terhadap sesuatu; tafsiran

Intuisi

Daya atau kemampuan mengetahui atau memahami sesuatu tanpa dipikirkan atau dipelajari; bisikan hati; gerak hati

K

Kombinatorik

Cabang matematika yang mempelajari enumerasi, kombinasi, dan permutasi himpunan dari unsur-unsur dan relasi matematis yang mencirikan sifat-sifatnya

Konjektur

Sebuah pernyataan yang mana nilai kebenarannya tidak atau belum kita ketahui.

Kontradiksi

Pertentangan antara dua hal yang sangat berlawanan atau bertentangan

Kreadibilitas

Keadaan atau kondisi yang dapat dipercaya dan bisa dipertanggungjawabkan sebagaimana mestinya

L

Lemma

Suatu teorema sederhana yang mana dipergunakan sebagai hasil-antara dalam pembuktian teorema yang lain

M

Menggeneralisasikan

Perihal membuat suatu gagasan lebih sederhana daripada yang sebenarnya

P

Probabilitas

Peluang atau kemungkinan dari suatu kejadian, terjadi atau tidak dan seberapa besar kemungkinan kejadian tersebut berpeluang untuk terjadi.

R

Representasi

Proses pemaknaan kembali sebuah objek/fenomena/realitas yang maknanya akan tergantung bagaimana seseorang itu mengungkapkannya melalui bahasa

S

Spektrum

Suatu kondisi yang tidak terbatas pada serangkaian nilai tertentu tetapi dapat bervariasi, tanpa langkah-langkah, di seluruh kontinum

T

Triangulasi

Teknik pemeriksaan keabsahan data yang memanfaatkan sesuatu yang lain di luar data itu untuk keperluan pengecekan atau sebagai pembanding terhadap data itu

Indeks

R

S

T

Biodata Penulis

DWI PRIYO UTOMO adalah dosen di Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Muhammadiyah Malang. DPU, demikian teman-teman sekolahnya biasa memanggil, lahir di Desa Bendo, Kecamatan Ponggok, Kabupaten Blitar, Jawa Timur pada 26 Pebruari 1962. Pendidikan tingkat SD, SMP, dan SMA diselesaikan di Blitar. Tamat dari SDN Bendo 2 pada tahun 1974, tamat dari SMPN 2 Blitar pada tahun 1977 dan tamat dari SMAN 1 Blitar pada 1981. Selanjutnya, pendidikan sarjana dan magister pendidikan matematika diperoleh dari Universitas Negeri Malang (dahulu IKIP Malang) pada tahun 1986 dan 1990.

Gelar doktor pendidikan matematika diperoleh dari Universitas Negeri Surabaya (UNESA) pada tahun 2007. Dalam lima tahun terakhir, sebagai dosen UMM, penulis terlibat dalam berbagai kegiatan pendidikan dan pelatihan sebagai berikut. Sebagai koordinator penjaminan mutu Pendidikan Profesi Guru (PPG) di UMM (tahun 2018-

sekarang). Sebagai Instruktur Penguatan Kepala Sekolah Kota Malang, Kota dan Kabupaten Blitar pada tahun 2019.

Melakukan berbagai pengabdian untuk guru-guru matematika SD, SMP, dan SMA Muhammadiyah di Kota dan Kabupaten Malang. IbM Guru Dalam Pembuatan Media Fx Draw Di SMP Muhammadiyah Malang (2019), IbM Guru dalam Pelatihan Dan Pendampingan Pembuatan Modul UKBM (Unit Kegiatan Belajar Mandiri) di SMA Muhammadiyah Binaan FKIP UMM Se-Malang Raya (2018), IbM Guru Dalam Pembuatan Media Geogebra Di SMP Muhammadiyah Malang (2017). IbM Guru dalam Pelatihan Dan Pendampingan Penyusunan Instrument Penilaian Otentik di SMP Binaan FKIP UMM (2016). Menulis Artikel Ilmiah di berbagai jurnal. Pengetahuan Konseptual dan Prosedural dalam Pembelajaran Matematika (2010). Pengembangan Perangkat Pembelajaran Berbasis Masalah pada Pembelajaran Matematika di SD (2011). Pengembangan Perangkat Pembelajaran Mahasiswa Prodi Pend. Matematika Peserta PPL 2009/2010 di SMP dan SMU di Malang (2011). Pengembangan Model Pembelajaran Kooperatif Matematika yang Berorientasi pada Kepribadian Siswa di SD (2012). Analisis Matematis dan Ekonomis Penggunaan Metanol dan Etanol pada Kompor "HD" (2011). Model Pembelajaran Kooperatif, Teori yang Mendasari dan Prakteknya dalam Pembelajaran di Sekolah Dasar & Sekolah Lanjutan (2011). Masalah-Masalah dalam Pembelajaran Matematika di SLTP (2012). Pengembangan Model Pembelajaran Kooperatif Matematika yang Berorientasi pada Kepribadian Siswa (Model PKBK) di Sekolah Dasar (2013). Instrumental and Relational Understanding Analysis of 5th Grade Elementary School Students on Integers Addition (2019). An Analysis on Creative Thinking Skill on Algebra Materials of Students in Regular, Acceleration, and Olympiad Classes (2018). Students' Understanding Of The Smart Solution Method And its Use In Solving Straight Line Problems (2017). Pengembangan LKS Berbasis REACT pada Materi Pecahan di SD Kelas IV (2016).

PEMAHAMAN RELASIONAL

PEMBELAJARAN MATEMATIKA hendaknya diarahkan agar mahasiswa memiliki pemahaman relasional yang tidak hanya berfokus pada prosedur penyelesaian masalah, namun juga diarahkan untuk membantu mahasiswa memahami konsep.

Pemahaman relasional adalah pemahaman terhadap prosedur yang akan digunakan dalam memecahkan masalah dan mengapa langkah-langkah dari prosedur tersebut dilakukan.

Pemahaman relasional harus dimiliki oleh mahasiswa, karena dengan pemahaman relasional mahasiswa dapat mengembangkan ide-ide yang diilikinya untuk memecahkan masalah.

Mahasiswa yang memiliki pemahaman instrumental saja belum dapat dikatakan memiliki pemahaman secara keseluruhan. Dan buku ini membantu mahasiswa mencapai ke tahap pemahaman tersebut.

Selamat membaca!

PENDIDIKAN MATEMATIKA
ISBN 978-623-7148-42-5
9 786237 148425

Bildung
+6281227475754
Bildung
@sahabatbildung
bildungpustakautama@gmail.com
www.penerbitbildung.com