PEMBELAJARAN

MATEMATIKA SMA

Buku ini disusun sebagai salah satu bahan ajar dalam pelaksanaan kegiatan belajar mengajar mata pelajaran Matematika di sekolah. Penyusunan *book chapter* ini ditujukan untuk peserta didik menengah atas (SMA) yang berisi definisi, rumus umum, contoh soal, serta latihan yang bisa dikerjakan peserta didik sebagai bentuk pemahaman konsep dan juga pengaplikasian untuk memecahkan masalah.

Para Penulis:

Alfiani Athma Putri Rosyadi - Aisyah Al Adiibah - Ajeng Dwi Putri Pratama - Annisaa Khoirunnillah - Auliya Lely Qurratha A - Berlian Sheza Kartika - Dini Okta Amelia - Dwi Wahyu Puspitasari - Fa`ik Natun Nadhiroh - Fahad Radfan Fuhaid - Fara Fadila - Fitrotun Nisa - Galih Azhar Ramadhan - Hanifa A'isy Zahrani - Henggis Estenian Bestin - Inas Faridatul Hima - Lugas Subiantoro - Muhammad Abbas Amrullah - Muhammad Allegra P A - Muhammad Ilham Utama - Nabilla Permata Sari - Nur Hidayah - Rani Marni Jamlean - Risyda Fauziatul Af'idah - Sherly Putri Cahyani - Shilviana Dwi Fitdyawati - Syafirda Azmi Aulia - Vina Ananda Aprilia - Wahyu Puspa Larasati - Zharla Zetira Aszahra

Bildung

+6281227475754

Bildung

@sahabatbildung

bildungpustakautama@gmail.com

www.penerbitbildung.com

ISBN 978-623-8091-15-7

9 786238 091157

Alfiani Athma Putri Rosyadi, dkk.

PEMBELAJARAN MATEMATIKA SMA

Bildung

Alfiani Athma Putri Rosyadi, dkk.

PEMBELAJARAN MATEMATIKA SMA

Bildung

PEMBELAJARAN MATEMATIKA SMA

BILDUNG
2023

Alfiani Athma Putri Rosyadi, dkk.

PEMBELAJARAN MATEMATIKA SMA

Bildung

Copyright ©2023, Bildung
All rights reserved

PEMBELAJARAN MATEMATIKA SMA

Alfiani Athma Putri Rosyadi, Aisyah Al Adiibah, Ajeng Dwi Putri Pratama, Annisaa Khoirunnillah, Auliya Lely Qurratha A, Berlian Sheza Kartika, Dini Okta Amelia, Dwi Wahyu Puspitasari, Fa`ik Natun Nadhiroh, Fahad Radfan Fuhaid, Fara Fadila, Fitrotun Nisa, Galih Azhar Ramadhan, Hanifa A'isy Zahrani, Henggis Estenian Bestin, Inas Faridatul Hima, Lugas Subiantoro, Muhammad Abbas Amrullah, Muhammad Allegra P A, Muhammad Ilham Utama, Nabilla Permata Sari, Nur Hidayah, Rani Marni Jamlean, Risyda Fauziatul Af'idah, Sherly Putri Cahyani, Shilviana Dwi Fitdyawati, Syafirda Azmi Aulia, Vina Ananda Aprilia, Wahyu Puspa Larasati, Zharla Zetira Aszahra

Desain Sampul: Ruhtata
Layout/tata letak Isi: Tim Redaksi Bildung

Perpustakaan Nasional: Katalog Dalam Terbitan (KDT)
Pembelajaran Matematika SMA/Alfiani Athma Putri Rosyadi, dkk./Yogyakarta: CV. Bildung Nusantara, 2023

vi + 146 halaman; 15,5 x 23 cm
ISBN:

Cetakan Pertama: Agustus 2023

Penerbit:
BILDUNG
Jl. Raya Pleret KM 2
Banguntapan Bantul Yogyakarta 55791
Email: bildungpustakautama@gmail.com
Website: www.penerbitbildung.com

Anggota IKAPI

Hak cipta dilindungi oleh undang-undang. Dilarang mengutip atau memperbanyak sebagian atau seluruh isi buku tanpa seizin tertulis dari Penerbit dan Penulis

DUMMY

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa, karena atas berkah, rahmat, dan karunia-Nya, penyusunan *book chapter* matematika ini dapat diselesaikan. Buku ini disusun sebagai salah satu bahan ajar dalam pelaksanaan kegiatan belajar mengajar mata pelajaran Matematika di sekolah. Penyusunan *book chapter* ini ditujukan untuk peserta didik menengah atas (SMA) yang berisi definisi, rumus umum, contoh soal, serta latihan yang bisa dikerjakan peserta didik sebagai bentuk pemahaman konsep dan juga pengaplikasian untuk memecahkan masalah.

Ucapan terima kasih penulis sampaikan kepada pihak-pihak yang telah membantu, memberi dukungan, serta saran dalam penyusunan *book chapter* ini. Penulis menyadari bahwa *book chapter* ini masih terdapat banyak kekuranngan. Oleh karena itu, penulis sangat mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak, untuk perbaikan dan penyempurnaan *book chapter* ini. Akhir kata, besar harapan penulis semoga *book chapter* ini dapat bermanfaat bagi semua pihak dan mudah-mudahan dapat memberikan yang terbaik bagi kemajuan pendidikan kedepannya. Sekian dan terima kasih.

Malang, 18 Juli 2023

Penulis

DUMMY

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....v
DAFTAR ISI.....vi

BAB 1 Defini dan Fnngsi Contoh Gamma..... 1
BAB 2 Definisi, Bentuk Persamaan Garis Lurus, dan Jarak Titik ke Lurus 7
BAB 3 Pengertian Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear: Contoh dan Operasinya..... 21
BAB 4 Definisi, Rumus, Serta Perbedaan Bunga Tunggal dan Bunga Majemuk.....36
BAB 5 Konsep, Operasi, Determinan, dan Invers Matriks 42
BAB 6 Logika Matematika 51
BAB 7 Turunan Diferensial 62
BAB 8 Definisi, Contoh Persamaan dan Pertidaksamaan Kuadrat..... 69
BAB 9 Fungsi Kuadrat.....79
BAB 10 Persamaan dan Pertidaksamaan Eksponen, Pengertian, Sifat, dan Contoh 88
BAB 11 Definisi, Jenis, Operasi, Perbandingan, Dot Product, Cross Product, Proyeksi Orthogonal Suatu Vektor 97
BAB 12 Definisi, Sudut, Perbandingan, dan Grafik Fungsi 113
BAB 13 Limit.....125
BAB 14 Integral 132
BAB 15 Definisi, Contoh Himpunan dan Operasinya.....138

DAFTAR PUSTAKA..... 144

DUMMY

1

Definisi dan Contoh Fungsi Gamma

Alfiani Athma Putri Rosyadi

DUMMY

Pendahuluan

Materi fungsi mulai dikenalkan pada jenjang Sekolah Menengah Pertama, dan terus dibahas sampai matakuliah kalkulus yang ada pada tingkat Universitas pada setiap jurusan. Fungsi mempunyai peran penting pada setiap konsep matematika.

Fungsi sangat erat kaitannya dengan kehidupan sehari-hari. Tukang parkir mengatur kendaraan roda dua dan roda empat di pinggir jalan menggunakan konsep fungsi, meskipun pada kenyataannya mereka tidak menyadari hal tersebut. Seorang ahli ekonomi suatu perusahaan mempunyai fungsi tertentu dalam mengatur keuangan.

1. Definisi

Fungsi merupakan suatu aturan yang memetakan setiap anggota domain dengan tepat satu anggota kodomain. Secara mudah, kita dapat pula menentukan kapan suatu aturan bukan suatu fungsi. Tentunya, dengan mencari negasi dari definisi fungsi tersebut. Salah satu contohnya adalah suatu aturan dikatakan bukan fungsi jika ada anggota domain yang tidak mempunyai pasangan di kodomain.

Notasi untuk menyatakan fungsi adalah $f(x)$, dimana f adalah nama fungsinya, kemudian x adalah variabelnya. Kita bisa mengganti huruf f dan x dengan menggunakan huruf lain yang kita suka. Misalkan $s(b)$, $w(c)$, dan lain sebagainya. Sedangkan untuk domain, kodoman, dan range dari suatu fungsi f, berturut-turut disimbolkan dengan D_f, K_f, R_f.

Fungsi tidak lepas dari domain, kodomain, dan range. Domain itu sendiri adalah himpunan semua bilangan real yang membuat fungsi tersebut terdefinisi. Istilah lain dari domain adalah daerah asal, daerah definisi, dan wilayah.

Misalkan diketahui suatu fungsi $(x) = \frac{1}{x}$, maka agar fungsi tersebut terdefinisi, maka domainnya adalah : $D_f = \{x | x \neq 0, x \in R\}$. Hal ini berarti bahwa, apabila kita mengambil nilai $x = 0$, maka nilai dari $f(0) = \frac{1}{0} =$ tidak terdefinisi.

Untuk lebih memahami domain dari suatu fungsi, selesaikanlah permasalahan berikut

2. Latihan Soal

Tentukan daerah asal/domain dari setiap fungsi berikut!

1. $h(x) = x^2 + 2, x \in R$
2. $f(x) = \frac{3}{2-x}, x \in R$
3. $g(x) = 2\sqrt{x-4}, x \in R$
4. $c(x) = \frac{2}{\sqrt{x-3}}, x \in R$

3. Macam-macam Fungsi

Ada beberapa fungsi khusus yang sering digunakan dalam keperluan tertentu. Fungsi-fungsi tersebut dibahas sebagai berikut.

1. Fungsi Identitas

Misalkan f adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan A yang didefinisikan $f: A \to A$ dengan $f(a) = a$ dimana $a \in A$

2. Fungsi Konstan

Suatu fungsi $f: A \to B$ disebut fungsi konstan jika f memasangkan semua $x \in A$ ke satu anggota $y \in B$. Nilai fungsi dari semua anggota A selalu sama yaitu y, sehingga berlaku $f(x) = y, \forall x \in A$.

DUMMY

3. Fungsi Lantai/Tangga

Misalkan $f: A \to B$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut

$\mathrm{f}(x) = \lfloor x \rfloor =$ bilangan bulat terbesar yang kurang atau sama dengan x,

maka f disebut fungsi lantai/tangga.

4. Fungsi Polinomial

Fungsi polynomial derajat n adalah fungsi yang berbentuk $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \forall x \in R$

Dengan n adalah bilangan bulat tak negatif dan

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ adalah bilangan-bilangan real yang tak negatif.

5. Fungsi Eksponensial

Fungsi eksponensial dengan basis b adalah fungsi dari bilangan real R ke bilangan real positif yang didefinisikan sebagai berikut.

$$f: R \to R^+$$

Dengan $f(x) = b^x,\ \forall x \in R$

Kita bisa menggunakan kalkulator untuk membantu dalam mensketsa grafik dari fungsi eksponen. Untuk memudahkan, gunakan kasus, bagaimana jika $b > 1$ dan bagaimana jika $b < 1$. Kemudian, sajikan dalam grafik !

6. Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma basis b adalah fungsi dari bilangan real positif ke bilangan real, yang didefinisikan sebagai berikut:

$f: R^+ \to R$ dengan $f(x) = b_{\log x}\ \forall x \in R^+$

Fungsi logaritma merupakan kebalikan dari fungsi eksponensial.

7. Fungsi Gamma

Fungsi Gamma didefinisikan sebagai berikut.

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$$

8. Fungsi Beta

Fungsi Beta didefinisikan sebagai berikut.

DUMMY

$$\mathrm{B}(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}\,dx$$

9. Fungsi Bessel

Fungsi Bessel lebih dikenal dengan fungsi Bessel I dan fungsi Bessel II. Berikut akan dijelaskan salah satu fungsi Bessel yaitu fungsi Bessel I.

Fungsi Bessel I dengan orde n didefinisikan sebagai

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\}$$

Atau

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!\,\Gamma(\mathrm{n}+\mathrm{r}+1)}$$

10. Fungsi Legendre

Fungsi Legendre banyak digunakan pada bidang fisika dan bidang teknik. Pada bidang matematika, fungsi legendre merupakan salah satu fungsi khusus yang menarik untuk dibahas.

Fungsi legendre timbul sebagai penyelesaian dari persamaan diferensial

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \ldots (1)$$

Yang disebut persamaan diferensial Legendre.Penyelesaian umum dari persamaan (1) untuk $n = 0,1,2,3,\ldots$ diberikan oleh

$$y = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x)$$

Dengan$P_n(x)$ sebagai polynomial yang disebut polynomial legendre dan $Q_n(x)$ disebut fungsi legendre jenis kedua.

Polinomial Legendre didefinisikan sebagai

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots}{n!}\left\{x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right\}$$

DUMMY

Berikut adalah fungsi generator untuk untuk polynomial Legendre

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

Bukti:

Berdasarkan teorema binomial, $(1+v)^p = 1 + pv + \frac{p(p-1)}{2!}v^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}v^3 +$ ...

Diketahui bahwa

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-t(2x-t))^{-\frac{1}{2}}$$

$$\leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}t(2x-t) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^2(2x-t)^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^3(2x-t)^3 + \ \ldots$$

4. Contoh Soal dan Pembahasan

Suatu integral dikatakan konvergen jika limitnya ada. Selanjutnya akan dicari bagaimana jika n = 1? Apakah limitnya ada?

$$\lim_{x\to 1}\int_0^{\infty} x^{n-1}\, e^{-x}\, dx$$

$$= \lim_{x\to 1}\int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 1$$

DUMMY

Karena limitnya ada, maka fungsi tersebut konvergen untuk nilai $n = 1$, sehingga kita bisa menentukan nilai dari $\Gamma(1)$ dengan menggunakan definisi, yaitu $\Gamma(1) = 1$.

Dengan menggunakan definisi, kita akan menentukan nilai dari $\Gamma(3)$

$$\Gamma(3) = \int_0^\infty x^{3-1}\, e^{-x}\, dx$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_0^a x^2 e^{-x} dx$$

Misalkan $u = x^2$, $dv = e^{-x}dx$, maka $du = 2xdx$ dan $v = -e^{-x}$

Sehingga, diperoleh

$$= \lim_{a\to\infty} \left((x^2 \cdot -e^{-x}) - e^{-x} 2xdx\right. \;= \lim_{a\to\infty} \left((x^2 \cdot -e^{-x}) + 2\int e^{-x}\, xdx\right)$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left((a^2 \cdot -e^{-a}) + 2(1 + e^{-a}(-a-1)\right) = 0 + 2.1 = 2$$

5. Latihan Soal

Hitunglah nilai dari

1. $\Gamma(7)$
2. $\Gamma(3) + \Gamma(2)$
3. $\Gamma(1) - \Gamma(4)$
4. $\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}$
6. Tentukan nilai dari:
   a. $\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx$
   b. $\int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx$
   c. $\int_0^\infty x^6 e^{-3x} dx$
7. Buktikan bahwa $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

DUMMY

DAFTAR PUSTAKA

Aisyah, dkk. 2021. Ringkasan Materi, Soal, dan Pembahasan Gradien dan Persamaan Garis Lurus Berbasis HOTS. Bandar Lampung: Arjasa Pratama.

Antika R. 2022. Makalah Turunan (Diferensial).

Azijehmail, K. 2013. Persamaan dan Pertidaksamaan.

Darwanto, Dinata, K. B., & Junaidi. (2020). Teori Himpunan. In Nucl. Phys. Universitas Muhammadiyah Kotabumi.

Defantri. 2013. 50+ Soal dan Pembahasan Matematika SMA Pertidaksamaan.

Djadir, dkk. 2017. Persamaan dan Pertidaksamaan. Fatqurhohman. (2021). Buku Ajar Teori Himpunan. Klik Media.

Fardian, Limit Fungsi Aljabar, http://yan-fardian.blogspot.co.id.

Hidayati, K., Dewi, S., & Suksmono, A. (2008). Aktif Menggunakan Matematika. Jakarta: Departemen Pendidikan Nasional.

Irfan, Y. (2020). Modul pembelajaran SMA matematika umum Kelas XI: determinan dan invers matriks.

Ismunarti, D. H. (2007). Buku Ajar Matematika II: Diferensial/Turunan.

Istiyanto, Heri. (2009). Bank Soal Matematika SMA. Jakarta: gagasmedia .

Jeroanayam. (2020). Wangsit UTBK SBMPTN Matematika 2021. Serang: Wangsit Education.

Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia. (2013). Matematika Kelas X. Cetakan Ke- 1. ISBN 978-602-282-103-8. Jakarta.

Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan Republik Indonesia. (2020). Modul Pembelajaran SMA Matematika Umum Kelas X. Tangerang.

Krismanto, A. (2004). Diklat Instruktur/Pengembang Matematika SMP Jenjang Dasar Aljabar. Yogyakarta: Tim PPPG Matematika.

Kristayulita. (2020). Trigonometri. Cetakan Ke- 1. ISBN 978-623-7881-99-5. Sanabil. Mataram.

Kurniawan, I. 2015. Persamaan dan Pertidaksamaan Linear.

Lestari, D. (2013). Persamaan Diferensial. Yogyakarta: Universitas Negeri Yogyakarta.

Maker Zero. (2018). Pembahasan Soal UN Persamaan Trigonometri.

DUMMY

Manullang, S., Andri, S., Hutapea, T. A., Sinaga, L. P., & Sinambela, P. (2017). Matematika SMA/MA/SMK/MAK Kelas XI.

Manullang Sudianto, Kristanto Andri S., Hutapea Tri Andri, dkk. (2017). Matematika . Jakarta. Kementrian Pendidikan dan Kebudayaan.

Marlina, E. (2021). Desain Pembelajaran Materi Fungsi Gamma untuk Mengoptimalkan Kemampuan Berpikir Mahasiswa pada Mata Kuliah Fungsi Khusus. JRMST| Jurnal Riset Matematika dan Sains Terapan, 1(01), 32-40.

Patta, R., Aras, L., & Bahar, B. (2021). Matematika Dasar. Makassar: Universitas Negeri Makassar.

Pratikno, Bayan, A., Sarindat, E., & Irawati, A. (2008). Mahir Matematika. Jakarta: Pusat Perbukuan Departemen Pendidikan Nasional.

Pratiwi, N. 2022. Pengertian Persamaan Matematika dan Jenisnya.

Puti Purfini, A. (2018). Turunan.

Rustam. (2021). The King Bedah Kisi-Kisi SBMPTN & UM Mandiri Saintek 2021. Yogyakarta: Forum Edukasi

Rosyadi, A. A. P. (2019). Kalkulus Differensial (Vol. 1). UMMPress.

Rosyadi, A. A. P. (2020). Kalkulus Integral (Vol. 1). UMMPress.

Sardjana, Kana, Rosita. (2005). Ilmu Hitung Keuangan. Universitas Negeri Yogtakarta.

Setiawati, E, dkk. 2020. Persamaan dan Pertidaksamaan Linear.

Silvia, Isna., Erawati, Selly., dan Tarsimah, Imah. MATERI INTEGRAL. Integral Aljabar_Integral Fungsi Trigonometri_Integral Tak Tentu_Integral Tentu.

Sinaga, B., Sinambela, P. N. J. M., Sitanggang, A. K., Hutapea, T. A., Sinaga, L. P., Manullang, S., Simanjorang, M. & Bayuzetra, Y. T. (2014). Buku guru matematika. Jakarta: Kementerian Pendidikan dan Kebudayaa jin.

Surahman, I., & Ariwibowo, J. (2019). Hots Bank Matematika SMA/MA Kelas X, XI, XII SMA-Ala Bimbel. Yogyakarta: Oxygen Media Ilmu.

Susilo, Hariyani. 2019. Geometri Analitika (Datar Dan Ruang. Malang: Kanjuruhan Press.

Sutisna, E. (2020). Modul pembelajaran SMA matematika peminatan kelas X: vektor.

Soebagyo, Joko, Samsul Maarif, Sigid Edy Purwanto. (2020). Aljabar Linier dan Matriks. Bandung. Manggu Makmur Tanjung Lestari.

DUMMY

Swawikanti, K. 2022. Perbedaan Persamaan Linear dan Pertidaksamaan Linear.

Wagiyo, A., Mulyono, S., & Susanto. (2008). Pegangan Belajar Matematika (D. Pramani & Suharyati, Eds.). Pusat Perbukuan.

Widiarti, Sukaryadi, Mp., Siswanto, P., Agus Wahyudi, Mp., Andi Prabowo, Sp., Heru Suseno, Mp., Latif Zamroni, Mp., Tri Rusdiono, Mp., Suyudi Suhartono, Sp., Langgeng Hadi, Sp. P., Nyoman Pasek, S. I., Ismuji, Mp., & Titut Ariyanto, Sp. (n.d.). e-Modul e-Modul Direktorat Pembinaan SMA Direktorat Pembinaan SMA.

Yudianto, Erfan. (2020). Modul Integral. Universitas Jember.

DUMMY

1

Definisi dan Contoh Fungsi Gamma

Alfiani Athma Putri Rosyadi

Pendahuluan

Materi fungsi mulai dikenalkan pada jenjang Sekolah Menengah Pertama, dan terus dibahas sampai matakuliah kalkulus yang ada pada tingkat Universitas pada setiap jurusan. Fungsi mempunyai peran penting pada setiap konsep matematika.

Fungsi sangat erat kaitannya dengan kehidupan sehari-hari. Tukang parkir mengatur kendaraan roda dua dan roda empat di pinggir jalan menggunakan konsep fungsi, meskipun pada kenyataannya mereka tidak menyadari hal tersebut. Seorang ahli ekonomi suatu perusahaan mempunyai fungsi tertentu dalam mengatur keuangan.

1. Definisi

Fungsi merupakan suatu aturan yang memetakan setiap anggota domain dengan tepat satu anggota kodomain. Secara mudah, kita dapat pula menentukan kapan suatu aturan bukan suatu fungsi. Tentunya, dengan mencari negasi dari definisi fungsi tersebut. Salah satu contohnya adalah suatu aturan dikatakan bukan fungsi jika ada anggota domain yang tidak mempunyai pasangan di kodomain.

Notasi untuk menyatakan fungsi adalah $f(x)$, dimana f adalah nama fungsinya, kemudian x adalah variabelnya. Kita bisa mengganti huruf f dan x dengan menggunakan huruf lain yang kita suka. Misalkan $s(b)$, $w(c)$, dan lain sebagainya. Sedangkan untuk domain, kodoman, dan range dari suatu fungsi f, berturut-turut disimbolkan dengan D_f, K_f, R_f.

Fungsi tidak lepas dari domain, kodomain, dan range. Domain itu sendiri adalah himpunan semua bilangan real yang membuat fungsi tersebut terdefinisi. Istilah lain dari domain adalah daerah asal, daerah definisi, dan wilayah.

Misalkan diketahui suatu fungsi $(x) = \frac{1}{x}$, maka agar fungsi tersebut terdefinisi, maka domainnya adalah : $D_f = \{x | x \neq 0, x \in R\}$. Hal ini berarti bahwa, apabila kita mengambil nilai $x = 0$, maka nilai dari $f(0) = \frac{1}{0} =$ tidak terdefinisi.

Untuk lebih memahami domain dari suatu fungsi, selesaikanlah permasalahan berikut

2. Latihan Soal

Tentukan daerah asal/domain dari setiap fungsi berikut!

1. $h(x) = x^2 + 2, x \in R$
2. $f(x) = \frac{3}{2-x}, x \in R$
3. $g(x) = 2\sqrt{x-4}, x \in R$
4. $c(x) = \frac{2}{\sqrt{x-3}}, x \in R$

3. Macam-macam Fungsi

Ada beberapa fungsi khusus yang sering digunakan dalam keperluan tertentu. Fungsi-fungsi tersebut dibahas sebagai berikut.

1. Fungsi Identitas

Misalkan f adalah fungsi dari himpunan A ke himpunan A yang didefinisikan $f: A \to A$ dengan $f(a) = a$ dimana $a \in A$

2. Fungsi Konstan

Suatu fungsi $f: A \to B$ disebut fungsi konstan jika f memasangkan semua $x \in A$ ke satu anggota $y \in B$. Nilai fungsi dari semua anggota A selalu sama yaitu y, sehingga berlaku $f(x) = y, \forall x \in A$.

3. **Fungsi Lantai/Tangga**

Misalkan $f: A \to B$ adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut

f$(x) = \lfloor x \rfloor =$ bilangan bulat terbesar yang kurang atau sama dengan x,

maka f disebut fungsi lantai/tangga.

4. **Fungsi Polinomial**

Fungsi polynomial derajat n adalah fungsi yang berbentuk $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0, \forall x \in R$

Dengan n adalah bilangan bulat tak negatif dan

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ adalah bilangan-bilangan real yang tak negatif.

5. **Fungsi Eksponensial**

Fungsi eksponensial dengan basis b adalah fungsi dari bilangan real R ke bilangan real positif yang didefinisikan sebagai berikut.

$$f: R \to R^+$$

Dengan $f(x) = b^x,\ \forall x \in R$

Kita bisa menggunakan kalkulator untuk membantu dalam mensketsa grafik dari fungsi eksponen. Untuk memudahkan, gunakan kasus, bagaimana jika $b > 1$ dan bagaimana jika $b < 1$. Kemudian, sajikan dalam grafik !

6. **Fungsi Logaritma**

Fungsi logaritma basis b adalah fungsi dari bilangan real positif ke bilangan real, yang didefinisikan sebagai berikut:

$f: R^+ \to R$ dengan $f(x) = b_{\log x}\ \forall x \in R^+$

Fungsi logaritma merupakan kebalikan dari fungsi eksponensial.

7. **Fungsi Gamma**

Fungsi Gamma didefinisikan sebagai berikut.

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx$$

8. **Fungsi Beta**

Fungsi Beta didefinisikan sebagai berikut.

$$\mathrm{B}(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}\,(1-x)^{n-1}\,dx$$

9. Fungsi Bessel

Fungsi Bessel lebih dikenal dengan fungsi Bessel I dan fungsi Bessel II. Berikut akan dijelaskan salah satu fungsi Bessel yaitu fungsi Bessel I.

Fungsi Bessel I dengan orde n didefinisikan sebagai

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\}$$

Atau

$$J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!\,\Gamma(\mathrm{n}+\mathrm{r}+1)}$$

10. Fungsi Legendre

Fungsi Legendre banyak digunakan pada bidang fisika dan bidang teknik. Pada bidang matematika, fungsi legendre merupakan salah satu fungsi khusus yang menarik untuk dibahas.

Fungsi legendre timbul sebagai penyelesaian dari persamaan diferensial

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \ldots (1)$$

Yang disebut persamaan diferensial Legendre.Penyelesaian umum dari persamaan (1) untuk $n = 0,1,2,3, \ldots$ diberikan oleh

$$y = c_1 P_n(x) + c_2 Q_n(x)$$

Dengan$P_n(x)$ sebagai polynomial yang disebut polynomial legendre dan $Q_n(x)$ disebut fungsi legendre jenis kedua.

Polinomial Legendre didefinisikan sebagai

$$P_n(x) = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots}{n!}\left\{x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\right\}$$

Berikut adalah fungsi generator untuk untuk polynomial Legendre

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

Bukti:

Berdasarkan teorema binomial, $(1+v)^p = 1 + pv + \frac{p(p-1)}{2!}v^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}v^3 +$ ...

Diketahui bahwa

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = (1-2xt+t^2)^{-\frac{1}{2}} = (1-t(2x-t))^{-\frac{1}{2}}$$

$$\leftrightarrow 1 + \frac{1}{2}t(2x-t) + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}t^2(2x-t)^2 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}t^3(2x-t)^3 + \ \ldots$$

4. Contoh Soal dan Pembahasan

Suatu integral dikatakan konvergen jika limitnya ada. Selanjutnya akan dicari bagaimana jika $\mathrm{n} = 1$? Apakah limitnya ada?

$$\lim_{\mathrm{x}\to 1} \int_0^{\infty} x^{n-1}\, e^{-x}\, dx$$

$$= \lim_{x\to 1} \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = -e^{-x}\Big|_0^{\infty} = 1$$

Karena limitnya ada, maka fungsi tersebut konvergen untuk nilai $\mathrm{n} = 1$, sehingga kita bisa menentukan nilai dari $\Gamma(1)$ dengan menggunakan definisi, yaitu $\Gamma(1) = 1$.

Dengan menggunakan definisi, kita akan menentukan nilai dari $\Gamma(3)$

$$\Gamma(3) = \int_0^\infty x^{3-1}\, e^{-x}\, dx$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_0^a x^2 e^{-x} dx$$

Misalkan $u = x^2$, $dv = e^{-x}dx$, maka $du = 2xdx$ dan $v = -e^{-x}$

Sehingga, diperoleh

$$= \lim_{a\to\infty} \left((x^2 \cdot -e^{-x}) — e^{-x} 2xdx \right. \;= \lim_{a\to\infty} \left((x^2 \cdot -e^{-x}) + 2 \int e^{-x}\, xdx \right)$$

$$= \lim_{a\to\infty} \left((a^2 \cdot -e^{-a}) + 2(1 + e^{-a}(-a-1)\right) = 0 + 2.1 = 2$$

5. Latihan Soal

Hitunglah nilai dari

1. $\Gamma(7)$
2. $\Gamma(3) + \Gamma(2)$
3. $\Gamma(1) - \Gamma(4)$
4. $\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}$
6. Tentukan nilai dari:
   a. $\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx$
   b. $\int_0^\infty x^6 e^{-2x} dx$
   c. $\int_0^\infty x^6 e^{-3x} dx$
7. Buktikan bahwa $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$