BAB II
KAJIAN PUSTAKA

Kajian pustaka ini berupa penjelasan tentang teori yang mendukung penelitian. Adapun teori tersebut yaitu persamaan, penyelesaian persamaan, hampiran penyelesaian, metode Newton-Raphson, asumsi, asumsi metode Newton-Raphson, analisis asumsi, dan ingkaran asumsi.

2.1 Persamaan

Matematika mempunyai bidang kajian yang banyak, seperti geometri, trigonometri, kalkulus, statistika, dan masih banyak lagi. Bidang kajian tersebut mengandung objek matematika yang terdiri dari konsep, fakta, dan operasi. Konsep matematika mengandung materi himpunan yang terdapat materi relasi sebagai bahasan pokok. Relasi dibagi menjadi dua bahasan pokok yaitu fungsi, persamaan dan pertidaksamaan. Fungsi merupakan pemetaan dari himpunan domain ke kodomain. Persamaan merupakan kalimat matematika terbuka yang menyatakan hubungan sama dengan (=). Pertidaksamaan merupakan kalimat matematika terbuka yang menyatakan hubungan tidak sama dengan, lebih dari, kurang dari, lebih dari atau sama dengan, dan kurang dari atau sama dengan. Perbedaan fungsi dan persamaan dapat dilihat dari bentuk dan tujuannya. Contoh yang termasuk fungsi yaitu $y = 2x$, dimana tujuannya untuk mencari nilai y untuk suatu nilai x. Sehingga, memberikan hasil yang sangat luas, dikarenakan nilai x bisa berupa bilangan rill, bilangan bulat, bilangan cacah, dan lain sebagainya. Sedangkan contoh yang termasuk persamaan yaitu $5 = 2 - x$. Tujuannya yaitu hanya mencari nilai x yang menghasilkan $y = 5$. Nilai x bisa disebut juga solusi dari persamaan atau akar dari persamaan, dimana nilai x tidak hanya bernilai tunggal, tetapi bisa lebih dari satu tergantung pada jenis persamaannya. Jika dibuat pemetaan dari domain ke kodomain, persamaan merupakan subset dari fungsi.

Matematika menjabarkan model suatu persoalan nyata bidang rekayasa, solusi yang sering dicari berupa suatu nilai variabel x atau variabel t, sehingga terpenuhi persamaan $f(x)$ atau $f(t) = 0$ (Nasution & Zakaria, 2001). Jenis persamaan ada dua yaitu persamaan linear dan persamaan nonlinear. Persamaan linear merupkan persamaan yang paling mudah untuk dicari solusinya. Persamaan linear mempunyai variabel dengan pangkat satu, tidak mengandung fungsi transenden, dan tidak ada perkalian antar variabel. Bentuk umum dari persamaan linear yaitu

$$ax + by + c = 0 \quad \text{...(2.1)}$$

Sedangkan untuk persamaan nonlinear mempunyai variabel dengan pangkat lebih dari satu, terdapat perkalian antar variabel, dan mengandung fungsi transenden.

Penelitian ini menitikberatkan pada persamaan nonlinear. Persamaan nonlinear mempunyai bentuk yang sangat luas, seperti polinomial dan ada pula persamaan yang mengandung sinus, cosinus, logaritma, eksponensial, dan fungsi transenden lainnya. Oleh karena itu, dalam penelitian ini dibatasi hanya menggunakan persamaan polinomial.

Polinomial adalah suatu kelas sederhana dari fungsi-fungsi aljabar yang secara umum dinyatakan sebagai

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad \text{............................(2.2)}$$

dimana n adalah order dari polinomial dan a adalah konstanta (Chapra & Canale, 2010). Persamaan polinomial mengandung variabel yang perlu dicari nilainya, setiap persamaan membutuhkan sebuah penyelesaian untuk mencari nilai dari akar atau solusi persamaan.

2.2 Penyelesaian Persamaan

Setiap permasalahan punya solusi untuk menyelesaikannya, begitupula dalam masalah matematika, khususnya pada sistem persamaan linear (lanjar) maupun nonlinear (nirlanjar). Persamaan linear dapat diselesaikan secara analitik, sehingga tidak membutuhkan metode khusus untuk menyelesaikannya. Contoh, $x + 23 = 2$, dapat ditulis $x = 2 - 23$, sehingga didapat $x = -21$. Sedangkan untuk persamaan nonlinear dengan bentuk yang paling sederhana yaitu persamaan kuadrat atau bisa disebut persamaan karakteristik orde dua mempunyai persamaan umum yaitu

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{...(2.4)}$$

untuk mencari akar karakteristik persamaan tersebut digunakan rumus sebagai berikut:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{..(2.5)}$$

Contoh: $x^2 + 6x - 16$, bila menggunakan rumus didapat akar-akarnya yaitu $x_1 = 8$ dan $x_2 = -2$.

Mencari solusi dari persamaan linear dan persamaan kuadrat tidak mengalami kesulitan. Bagaimana dengan persamaan yang lebih rumit seperti polinomial orde 10, dan bentuk nonlinear yang melibatkan bentuk sinus, cosinus, logaritma, eksponen, dan fungsi transenden lainnya. Contoh, tentukan akar-akar persamaan dari $23{,}4x^7 - 1{,}25x^6 + 120x^4 + 15x^3 - 120x^2 - x + 100 = 0$, tentukan harga x yang memenuhi persamaan $\sqrt{27{,}8e^{5x} - \frac{1}{x}} = cos^{-1}\frac{(120x^2+\sqrt{2x})}{17x-65}$, dan masih banyak lagi. Persoalan matematik seperti contoh tidak bisa diselesaikan secara analitik, dengan kata lain sulit menggunakan metode analitik karena bentuk persamaan yang rumit. Bila metode analitik tidak dapat menyelesaikan persamaan, maka menggunakan metode numerik untuk mencari solusinya (Munir, 2003).

Munir (2003) mengatakan bahwa metode pencarian akar dibagi menjadi dua jenis:

1. Metode Tertutup (*brackting method*).
   Metode yang termasuk metode tertutup mencari akar dalam selang $[a, b]$. Selang $[a, b]$ sudah dipastika mengandung satu buah akar, oleh karena itu metode tertutup selalu konvergen atau bisa disebut juga metode konvergen. Metode yang termasuk metode tertutup yaitu metode bagi dua dan metode regular-falsi.
2. Metode Terbuka.
   Metode terbuka tidak memerlukan selang yang mengurung akar, yang dibutuhkan hanya sebuah tebakan awal atau dua tebakan awal. Inilah alasan mengapa metode ini dinamakan metode terbuka. Hampiran akar sekarang didasarkan pada hampiran akar sebelumnya. Kadangkala lelaran konvergen ke akar sejati, kadangkala divergen. Namun, apabila lelarannya konvergen, konvergensinya berlangsung dengan cepat dibandingkan dengan metode tertutup. Metode yang termasuk metode terbuka yaitu metode lelaran titik-tetap (*fixed-point iteration*), metode Newton-Raphson, dan metode *secant.*

Metode tertutup dan terbuka digunakan untuk mencari nilai yang mendekati nilai sejati dari suatu persamaan. Sehingga, akar hampiran merupakan solusi dari suatu persamaan.

2.3 Hampiran Penyelesaian

Hampiran bisa disebut juga dengan pendekatan (*approximation*). Hampiran adalah nilai yang mendekati nilai sejati. Aproksimasi juga merupakan pembulatan terhadap nilai dari hasil pengukuran. Metode numerik menghasilkan penyelesaian yang mendekati hasil penyelesaian dari metode analitik yang eksak. Metode numerik menggunakan grafik dan perhitungan yang mudah dalam proses penyelesaiannya. Akan tetapi, dasar pemikiran tidak keluar dari pendekatan analisis matematis. Sebab, pendekatan yang digunakan dalam metode numerik merupakan pendekatan analisis matematis.

Hampiran menjadi point yang membedakan metode analitik dan metode numerik. Metode analitik menghasilkan nilai eksak untuk akar penyelesaiannya, sedangkan metode numerik menggunakan akar hampiran yang mendekati akar sejati. Berdasarkan definisi hampiran, dimana nilai akar merupakan hampiran dari akar sejatinya, mengakibatkan ada jarak antara akar hampiran dengan akar sejati. Semakin kecil jarak antara akar hampiran dengan akar sejati, maka akar tersebut merupakan penyelesaian dari persamaan. Bila akar hampiran mempunyai jarak yang besar dari akar sejati, maka akar tersebut tidak termasuk solusi dari persamaan. Jarak antara akar hampiran dengan akar sejati disebut galat atau *error* (ε). Sehingga bisa ditulis

$$\varepsilon = |a - \hat{a}| \quad \text{...(2.6)}$$

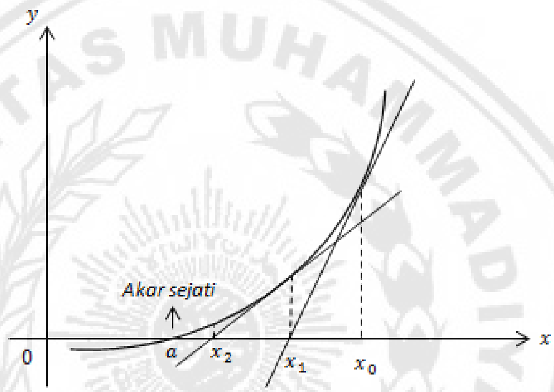
dimana â merupakan akar hampiran dan a merupakan akar sejati.

Galat mempunyai peran yang sangat penting dalam penggunaan metode Newton-Raphson. Solusi persamaan yang diperlukan yaitu akar hampiran yang paling dekat dengan akar sejati, dengan kata lain *error* nya bernilai kecil. Sehingga $|f(x)|$ harus kurang dari samadengan galat, atau bisa ditulis $|f(x)| <$ galat. Nilai galat bisa ditentukan sendiri jika di soal tidak dicantumkan. $Error$ dibagi dua berdasarkan jenisnya yaitu *error* absolut (E) dan *error* relatif (R). *Error* absolut dan *error* relatif bisa dicari dengan menggunakan rumus yaitu $E = |a - \hat{a}|$ dan $R = \frac{|a-\hat{a}|}{|a|}$. *Error* absolut dan *error* relatif digunakan pada setiap metode, baik metode dengan lelaran paling lambat hingga metode dengan lelaran paling cepat. Metode yang mempunyai lelaran paling cepat untuk mencari akar hampiran dari suatu persamaan yaitu metode Newton-Raphson.

2.4 Metode Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson merupakan metode Newton yang dimodifikasi oleh Joseph Raphson. Tahun 1669 Issac Newton menemukan metode untuk mencari akar dari sebarang fungsi yang memiliki turunan pertama. Kemudian, metode Newton dipublikasikan oleh John Willis pada tahun 1685. Tahun 1690 Joseph Raphson memodifikasi dan mempublikasikan dengan versi yang lebih menarik, yang dikenal dengan metode Newton-Raphson sampai saat ini (Bressoud, 2006).

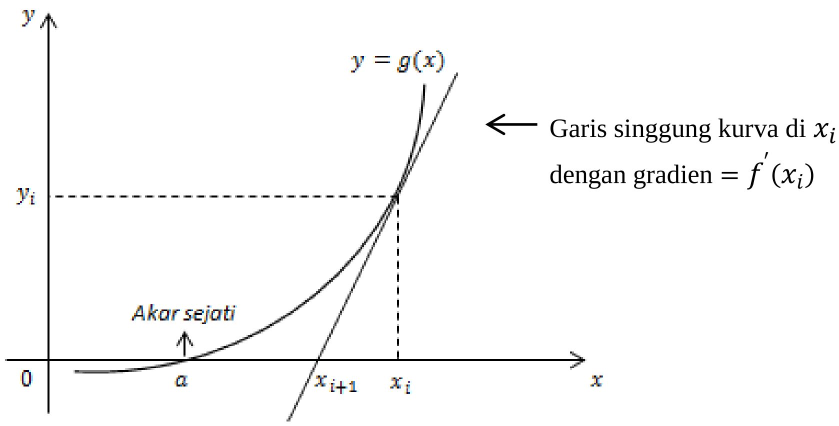
Metode Newton-Raphson merupakan salah satu metode yang digunakan untuk mencari akar persamaan. Metode Newton-Raphson membutuhkan satu perkiraan awal x_0 dan turunan pertama dari persamaan untuk menentukan akar selanjutnya. Metode Newton-Raphson merupakan metode terbuka sehingga ada kalanya nilai akar divergen dari nilai akar sejatinya. Proses hampiran ke akar sejati dimulai dari perkiraan awal yang berupa x_0, kemudian ditarik garis putus-putus sejajar sumbu y hingga berpotongan dengan kurva dari persamaan nonlinear. Perpotongan antar garis merupakan sebuat titik, dimana pada titik tersebut akan dibuat garis yang bersinggungan dengan kurva. Garis singgung ditarik hingga memotong sumbu x. Perpotongan antara garis garis singgung dan sumbu x akan menjadi akar selanjutnya untuk menentukan akar yang paling dekat dengan akar sejati. Berikut gambar grafik dari proses hampiran ke akar sejati (a).



Gambar 2.1: Grafik Proses Hampiran ke Akar Sejati

Ada dua pendekatan dalam menurunkan rumus metode Newton-Raphson, yaitu penurunan rumus Newton-Raphson secara geometri dan penurunan rumus Newton-Raphson dengan bantuan deret Taylor (Munir, 2003).

a. Penurunan rumus Newton-Raphson secara geometri.



Gambar 2.2: Grafik Tafsiran Geometri Metode Newton-Raphson

dari gambar 2.2, gradien garis singgung di x_i adalah

$$m = f'(x_i) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_i)-0}{x_i - x_{i+1}} \quad \text{...(2.6)}$$

atau

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}}$$

Sehingga prosedur lelaran metode Newton-Raphson adalah

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, f'(x_i) \neq 0 \text{.......................................(2.7)}$$

b. Penurunan rumus Newton-Raphson dengan bantuan deret Taylor.

Uraikan $f(x_{i+1})$ di sekitar x_i ke dalam deret Taylor:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f'(x_i) + \frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{2} f"(t),\ \ x_i < t < x_{i+1}$$

yang bila dipotong sampai suku orde-2 saja menjadi

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f'(x_i)$$

karena persoalan mencari akar, maka $f(x_{i+1}) = 0$, sehingga

$$0 = f(x_i) + (x_{i+1} - x_i)f'(x_i)$$

atau

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad \text{...(2.8)}$$

Berdasarkan 2.7 dan 2.8 rumus metode Newton-Raphson yaitu

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}, \quad \text{...(2.9)}$$

dimana $i = 0, 1, 2, 3, ...$ dan $f'(x_i) \neq 0.$

Menentukan solusi dari persamaan nonlinear menggunakan rumus metode Newton-Raphson memerlukan tahapan-tahapan dalam menyelesaikannya. Langkah-langkah menyelesaikan persamaan nonlinear dengan metode Newton-Raphson yaitu:

a. Menentukan x_0 untuk perkiraan awal dan merupakan penentu iterasi konvergen atau divergen.
b. Mencari turunan pertama $f(x)$, $f'(x)$ dibutuhkan untuk mensubstitusikan nilai x_0.
c. Mensubstitusi nilai x_0 ke persamaan, karena dibutuhkan untuk mencari x_1.

d. Mensubstitusi nilai x_0 ke $f'(x)$, yang digunakan untuk mencari x_1.
e. Iterasi 1 mempunyai beberapa tahapan yang harus dilakukan, yaitu:
   1) Mencari x_1 dengan rumus metode Newton-Raphson.
   2) Mensubstitusi nilai x_1 ke persamaan.
   3) Cek apakah $|f(x_1)| < \text{toleransi}$. Jika $|f(x_1)| < \text{toleransi}$ maka iterasi berhenti dan x_1 merupakan solusi dari $f(x)$. Jika $|f(x_1)| > \text{toleransi}$ maka masih lanjut ke iterasi kedua.
   4) Jika $|f(x_1)| > \text{toleransi}$, tahap selanjutnya yaitu mensubstitusikan nilai x_1 ke $f'(x)$.
f. Iterasi 2 mempunyai step yang sama dengan iterasi pertama, akan tetapi dengan mensubstitusikan x_1.

Langkah-langkah dalam menentukan solusi persamaan nonlinear menggunakan metode Newton-Raphson memerlukan contoh untuk memperjelas penjelasan dalam setiap langkah penyelesaian.

Contoh 1, Hitunglah akar $f(x) = x - \cos x$ menggunakan metode Newton-Raphson dengan galat = 0,1. Setiap permasalahan membutuhkan sebuah solusi dengan menggunakan penyelesaian untuk mencari solusi tersebut.

Penyelesaian

Penyelesaian dilakukan untuk mencari akar hampiran dari persamaan dengan menggunakan rumus metode Newton-Raphson, karena untuk mencari akar hampiran dari persamaan membutuhkan prosedur yang berulang atau bisa disebut juga iterasi. Sehingga langkah pertama yaitu menentukan perkiraan awal (x_0) yang ditentukan sendiri jika di soal tidak ada. Misal $x_0 = 0$.

$f(x) = x - \cos x$ dengan menggunakan rumus turunan, sehingga $f'(x) = 1 + \sin x$.

Substitusi x_0 ke persamaan

$$f(0) = 0 - \cos 0 = -1$$

Substitusi x_0 ke $f'(x)$

$$f'(0) = 1 + \sin 0 = 1$$

Langkah selanjutnya dimulai dengan iterasi 1.

Iterasi 1

Mencari x_1 dengan rumus metode Newton-Raphson, sehingga

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0 - \frac{(-1)}{1} = 1$$

Substitusi nilai x_1 ke persamaan

$$f(1) = 1 - \cos 1 = 0{,}4597$$

x_1 merupakan akar hampiran dari persamaan jika memenuhi $|f(x_1)| < \text{toleransi}$. Sehingga butuh pengecekan, karena $|f(1)| > 0{,}1$ atau $|0{,}4597| > 0{,}1$ sehingga masih lanjut ke iterasi 2. Selanjutnya, iterasi kedua membutuhkan $f'(x_1)$. Sehingga, substitusi nilai x_1 ke $f'(x)$

$$f'(x_1) = 1 + \sin 0{,}4597 = 1{,}8415$$

Iterasi 2

Mencari x_2 dengan rumus metode Newton-Raphson, sehingga

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1 - \frac{0{,}4597}{18415} = 0{,}7504$$

Substitusi nilai x_2 ke persamaan

$$f(0{,}7504) = 0{,}7504 - \cos 0{,}7504 = 0{,}0189$$

x_2 merupakan akar hampiran dari persamaan jika memenuhi $|f(x_2)| < \text{toleransi}$. Sehingga butuh pengecekan, karena $|f(0{,}7504)| < 0{,}1$ atau $|0{,}0189| < 0{,}1$ sehingga iterasi berhenti. Dapat disimpulkan bahwa hampiran akar $f(x) = x - \cos x$ yaitu $0{,}0189$.

Berdasarkan contoh 1 dan penyelesainnya, terdapat beberapa kelemahan Metode Newton-Raphson, seperti metode-metode yang lain, dimana setiap metode mempunyai kelebihan dan kekurangan masing-masing. Seperti yang dikatakan oleh Munif dan Hidayatullah (2003) kelemahan metode Newton-Raphson yaitu:

1. Jika $f(x)$ mempunyai akar lebih dari satu, maka akar-akar penyelesaian tersebut tidak dapat dicari secara langsung atau secara bersamaan.
2. Tidak mencari akar imajiner.
3. Persamaan nonlinear yang cukup kompleks, pencarian turunan pertama dan kedua $f(x)$ akan menjadi sulit.

Kelemahan metode Newton-Raphson yang sudah disebutkan didasarkan pada asumsi yang harus dipenuhi ketika menggunakan metode Newton-Raphson dalam mencari solusi persamaan.

2.5 Asumsi

Metode Newton-Raphson merupakan sebagian kecil dari ilmu yang ditemukan para ilmuan maupun tidak. Setiap ilmu pasti mempunyai asumsi, karena adanya ilmu berawal dari asumsi-asumsi yang mendasari ilmu tersebut. Filsafat ilmu murni berangkat dari kajian filosofi terhadap asumsi-asumsi dasar yang ada dalam ilmu (Tim Dosen Filsafat Ilmu Fakultas Filsafat UGM, 1996). Asumsi diperlukan untuk mengatasi penelaahan suatu masalah menjadi lebar. Semakin terfokus obyek telaah suatu bidang kajian, maka semakin memerlukan asumsi yang lebih banyak (Lusi, 2008).

Asumsi mempunyai arti yang sangat banyak, tergantung pada ruang lingkupnya. Asumsi dalam penelitian, ekonomi dan filsafat ilmu mempunyai arti yang berbeda, sehingga pengertian asumsi dalam matematika juga mempunyai arti tersendiri. Asumsi dasar adalah rasional daripada atau dasar alasan keharusan timbulnya atau mungkin lahirnya suatu cabang ilmu pengetahuan baru yang disebut dengan ilmu filsafat pendidikan, yang memisahkan diri dari induknya, yaitu filsafat dan menjadi bagian dari rumpun konsep ilmu pendidikan (Saifullah, 1983). Asumsi merupakan kondisi yang sudah ditetapkan sehingga jangkauan penelitian mempunyai batas yang jelas. Jenis-jenis asumsi antara lain aksioma, postulat, dan premis tersamar dalam suatu entimen ordo pertama atau kedua.

Tujuan dari makalah ini yaitu mendeskripsikan kendala jika asumsi metode Newton-Raphson tidak terpenuhi. Setiap metode mempunyai asumsi yang menjadi batasannya. Pentingnya asumsi yaitu agar metode tersebut dapat digunakan dengan baik dan tidak menimbulkan hambatan. Jika asumsi tidak terpenuhi, pasti ada dampak yang mengakibatkan tujuan penggunaan metode tidak tercapai. Mengetahui dampak jika asumsi metode Newton-Raphson tidak terpenuhi, diharapkan mahasiswa paham pentingnya mengetahui asumsi metode Newton-Raphson sebelum menggunakannya, agar solusi persamaan dapat ditemukan dengan mudah tanpa ada masalah dan hambatan.

2.6 Asumsi Metode Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson mempunyai beberapa asumsi yang berlaku, yaitu:

a. Turunan pertama $f(x)$ tidak sama dengan nol.
b. Memenuhi $\frac{f(x_1)\cdot f''(x_1)}{f'(x_1)\cdot f'(x_1)} < 1$.
c. Akar tidak berada pada titik ekstrim.
d. Akar tidak termasuk akar kompleks (imajiner), karena metode Newton-Raphson tidak dapat menemukan akar imajiner.

Asumsi yang digunakan pada penelitian ini dibatasi menjadi dua asumsi yaitu: (1) $f'($ dan (2) memenuhi $\left|\frac{f(x)\cdot f"(x)}{f'(x)\cdot f'(x)}\right| < 1$. Menganalisis asumsi metode Newton-Raphson dilakukan untuk mengetahui dampak apa yang akan terjadi jika asumsi tidak terpenuhi.

2.7 Analisis Asumsi

Analisis merupakan penyelidikan terhadap suatu peristiwa. Analisis bertujuan untuk mengetahui keadaan yang sebenarnya dari sebab yang ada (Farikha, 2013). Sedangkan asumsi merupakan syarat yang diperlukan ketika menggunakan suatu metode. Sehingga analisis asumsi merupakan penyelidikan terhadap syarat yang harus terpenuhi ketika menggunakan suatu metode. Analisis asumsi dilakukan untuk menentukan dampak yang akan terjadi jika asumsi tidak terpenuhi. Cara yang dilakukan untuk menentukan dampaknya yaitu menggunakan pembuktian secara tidak langsung dan pembuktian secara langsung. Jika menggunakan pembuktian tidak langsung memerlukan ingkaran dari asumsi untuk proses pembuktian.

2.8 Ingkaran Asumsi

Ingkaran biasanya terdapat dalam logika matematika. Ingkaran bisa disebut juga dengan negasi atau penyangkalan, yang disimbolkan dengan (~). Ingkaran merupakan pernyataan baru dari sebuah pernyataan yang memiliki nilai kebenaran bertolak belakang dengan pernyataan awal. Jika pernyataan awal disimbolkan dengan p maka ingkarannya disimbolkan dengan $\sim p$. Sehingga tabel kebenarannya yaitu jika pernyataan bernilai benar maka ingkaran bernilai salah, dan sebaliknya jika pernyataan bernilai salah maka ingkaran bernilai benar. Asumsi yang petama yaitu 0, jika tidak terpenuhi berarti asumsi maka . Sedangkan asumsi yang kedua yaitu $\left|\frac{f(x)\cdot f"(x)}{f'(x)\cdot f'(x)}\right| < 1$, jika tidak terpenuhi maka $\left|\frac{f}{f' \quad f'(}\right|$ 1.