

BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Konsep graf yang sederhana dapat digunakan untuk menggambarkan suatu hubungan antara objek-objek. Graf juga dapat digambarkan dengan berbagai cara. Teori graf mempunyai banyak aplikasi di berbagai disiplin ilmu, seperti kimia, fisika, teknik, teknologi komputer, ekonomi, dan masih banyak yang lain untuk memudahkan menyelesaikan permasalahan. Teori graf juga berkaitan dengan beberapa cabang ilmu matematika yang lainnya, misalnya matrik, metode numerik, peluang, topologi, dan kombinatorika. Aplikasi graf yang begitu luas menjadikan graf dapat digunakan di berbagai disiplin ilmu maupun kehidupan sehari-hari untuk memodelkan permasalahan.

Teori graf pertama kali dikenalkan pada tahun 1736 oleh seorang matematikawan Swiss bernama Leonhard Euler. Teori graf pertama muncul digunakan untuk menyelesaikan masalah jembatan Königsberg yang tidak bisa dipecahkan dengan menggunakan pendekatan matematika klasik. Ia menggambarkan sebuah diagram untuk menggambarkan jembatan Königsberg dan dengan bantuan diagram tersebut permasalahan terpecahkan (Harris dkk, 2008).

Secara sederhana, graf merupakan himpunan titik dan sisi. Sedangkan secara formal, graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan $(V(G), E(G))$. $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut *titik*. Sedangkan $E(G)$ adalah himpunan pasangan tak berurutan dari titik-titik yang berbeda di $V(G)$ yang disebut *sisi* (Abdussakir dkk, 2009). Hal khusus, apabila $E(G) = \emptyset$ (tidak memiliki sisi) maka dalam kasus ini dinamakan *graf kosong* (*empty graph*).

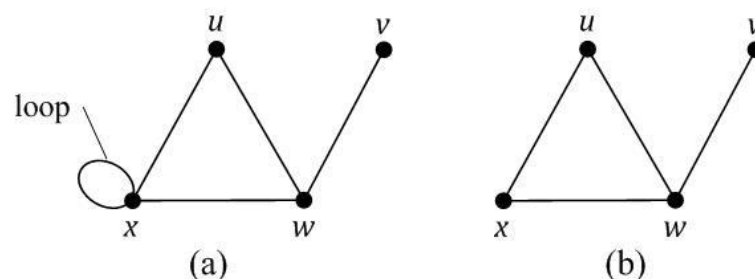
Secara garis besar pokok permasalahan yang berhubungan dengan graf dapat diklasifikasikan menjadi empat bagian, yaitu: 1) Masalah eksistensi, yang berhubungan dengan kemungkinan adanya suatu graf yang dapat dibuat atau dibangun; 2) Masalah konstruksi, yang berhubungan dengan pembentukan atau

pengkonstruksian suatu graf; 3) Masalah enumerasi, yang berhubungan dengan penghitungan atau pencacahan graf; dan 4) Masalah optimasi, yang berhubungan dengan pengambilan keputusan (Aldous & Wilson, 2004).

Pokok permasalahan enumerasi memiliki dua tipe, yaitu masalah menghitung berapa banyak objek tertentu dan masalah mencacah semua daftar objek-objek. Secara umum, permasalahan menghitung dan mencacah sangat erat hubungannya. Sebagai contoh, menghitung berapa banyak semua kemungkinan dan kemudian mencacah atau mendaftar semua kemungkinan yang ada. Jika kita menghitung kemungkinan dengan objek yang relatif kecil bisa dengan mudah kita menghitung dan mendaftar semua kemungkinannya, namun apabila objek yang ada banyak maka akan membutuhkan waktu dan usaha yang lebih untuk menyelesaikannya. Oleh karena itu dibutuhkan suatu metode atau alat bantu untuk mempermudah perhitungan atau menyelesaikan permasalahan enumerasi, yaitu dengan menggunakan Teorema Polya.

Teorema Polya pertama kali digunakan untuk menentukan banyaknya isomer pada senyawa hidrokarbon alkana pada bidang ilmu kimia. Teorema Polya diperkenalkan pada tahun 1935 oleh seorang matematikawan berkebangsaan Hungaria George Polya (1887-1985) (Gutman, 2008).

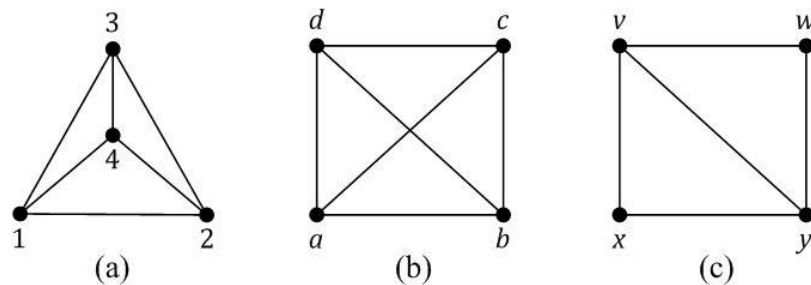
Teorema Polya dapat juga diterapkan dalam bidang teori graf. Salah satunya adalah digunakan untuk menentukan banyak graf sederhana yang tidak isomorfik. Secara umum, suatu graf dikatakan sederhana jika graf tersebut tidak memiliki sisi ganda dan loop.



Gambar 1.1 Contoh graf (a) graf dengan loop dan (b) graf sederhana.

Gambar 1.1 bagian (a) di atas bukan merupakan graf sederhana karena memiliki *loop*. Karena pada Gambar 1.1 bagian (b) tidak terdapat *loop*, maka (b) merupakan graf sederhana.

Dua buah graf, G_1 dan G_2 dikatakan isomorfik jika kedua graf terdapat korespondensi satu-satu antara titik-titik keduanya dan antara sisi-sisi keduanya sedemikian sehingga jika sisi e bersisian dengan titik u dan v di G_1 , maka sisi e' yang berkoresponden di G_2 juga harus bersisian dengan titik u' dan v' di G_2 (Munir, 2009).



Gambar 1.2 (a) isomorfik dengan (b), tetapi (a) tidak isomorfik dengan (c).

Tulisan ini merupakan penggabungan dua bidang, yaitu aljabar abstrak dan teori graf. Aljabar abstrak melalui teorema Polya akan digunakan untuk menyelesaikan masalah enumerasi pada graf sederhana. Selain itu, Tulisan ini akan membahas mengenai menentukan banyak graf sederhana yang saling tidak isomorfik dengan menggunakan Teorema Polya I dan mencacah atau mendaftar semua bentuk graf sederhana yang tidak saling isomorfik dengan menggunakan Teorema Polya II. Penelitian sebelumnya juga telah mengaplikasikan Teorema Polya dalam menentukan banyak graf sederhana yang tidak saling isomorfik dengan 5 titik (Ni'mah, 2013). Oleh karena itu, tulisan ini melanjutkan penelitian sebelumnya yaitu mengaplikasikan Teorema Polya dalam menentukan banyak graf sederhana yang tidak saling isomorfik dengan jumlah maksimal titik adalah 6 titik.

Langkah awal yang digunakan dalam tulisan ini adalah menentukan suatu himpunan yang terdiri dari 6 titik, kemudian menguraikan grup simetri, tipe permutasi, indeks sikel polinomial suatu grup sehingga diperoleh persamaan

indeks sikel polinomial. Selanjutnya, persamaan indeks sikel polinomial diaplikasikan pada teorema Polya I dan II untuk mengetahui banyak graf sederhana yang saling tidak isomorfik serta bentuk-bentuknya.

Berdasarkan penjelasan dan latar belakang permasalahan yang telah diuraikan, penulis bertujuan untuk mengetahui aplikasi Teorema Polya pada enumerasi graf sederhana dengan jumlah maksimal titik adalah 6 titik dengan judul penelitian “**Aplikasi Teorema Polya dalam Menentukan Banyak Graf Sederhana yang Tidak Isomorfik**”.

1.2. Rumusan Masalah

Teori graf mempunyai peranan yang sangat penting dalam kehidupan sehari-hari. Pokok permasalahan yang sering digunakan untuk mengetahui berapa banyak graf yang bisa terbentuk dan bentuk-bentuknya. Teorema Polya merupakan metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan enumerasi. Teorema Polya terdiri dari Teorema Polya I dan Teorema Polya II. Berdasarkan uraian latar belakang di atas dapat dirumuskan masalah sebagai berikut:

1. Bagaimana menentukan banyak graf sederhana yang tidak saling isomorfik dengan menggunakan Teorema Polya I?
2. Bagaimana mengetahui bentuk-bentuk graf sederhana yang tidak saling isomorfik dengan menggunakan Teorema Polya II?

1.3. Batasan Masalah

Untuk menghindari meluasnya pembahasan maka penulis membatasi permasalahan. Pembahasan difokuskan pada menentukan banyak graf sederhana yang tidak saling isomorfik dengan maksimal titik sebanyak 6 titik menggunakan Teorema Polya I dan bentuk-bentuk graf sederhana yang tidak saling isomorfik dengan maksimal titik sebanyak 6 titik menggunakan Teorema Polya II. Graf sederhana yang digunakan adalah graf yang tidak memiliki loop.

1.4. Tujuan Penelitian

Berdasarkan latar belakang dan permasalahan yang telah dirumuskan mengenai aplikasi Teorema Polya pada enumerasi graf sederhana yang menggunakan graf sikel dengan jumlah maksimal titik adalah 6 titik, maka tujuan yang ingin dicapai oleh penulis ini adalah:

1. Mengetahui banyaknya graf sederhana yang tidak saling isomorfik dengan menggunakan Teorema Polya I.
2. Mengetahui bentuk-bentuk graf sederhana yang tidak saling isomorfik dengan menggunakan Teorema Polya II.

1.5. Manfaat Penelitian

Manfaat dalam pembuatan tulisan ini secara teori dan aplikasinya adalah memberikan alternatif solusi dalam menyelesaikan permasalahan enumerasi graf, yaitu menentukan banyaknya graf sederhana yang tidak saling isomorfik serta bentuk-bentuknya dengan menggunakan Teorema Polya. Menambah referensi untuk mengembangkan metode yang dapat digunakan untuk memecahkan permasalahan yang berhubungan dengan graf. Dan penulisan ini diharapkan dapat memberikan kontribusi bagi pengembangan teori graf.